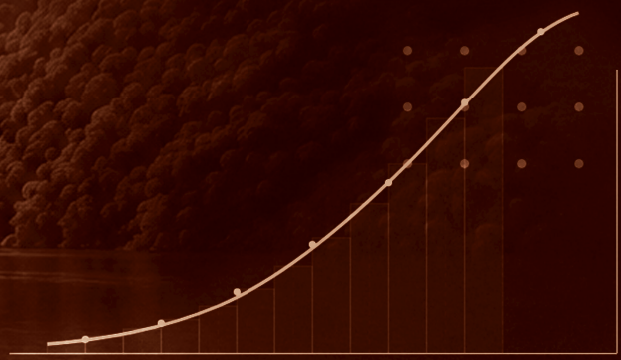


# ¡BIENVENIDOS AL CÁLCULO INTEGRAL!

Willin Gabriel Álvarez Irausquin

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$


$$\sum f(x_i) \Delta x \rightarrow \int f(x) dx$$

**Revisión Técnica:**

Editorial CEDIA

**Diseño y diagramación:**

Daniel Peña Ullauri

**Corrección de Estilo:**

Editorial CEDIA

**Coordinación:**

Laura Malache S. - Editorial CEDIA

**Portada:**

Imagen de fondo generada por Daniel Peña mediante Inteligencia Artificial.

Una publicación de la Editorial CEDIA,  
arbitrada por pares académicos de doble ciego.

The logo for Editorial CEDIA, featuring the word "cedia" in a bold, blue, lowercase sans-serif font.**CEDIA**

Gonzalo Cordero 2-111 y  
J. Fajardo  
Cuenca – Ecuador  
[cedia.edu.ec](http://cedia.edu.ec)

The logo for Universidad Regional Amazónica (Ikiam), featuring the word "Ikiam" in a bold, black, sans-serif font, followed by a red and white diamond pattern, and the text "Universidad Regional Amazónica" in a smaller font below.**UNIVERSIDAD REGIONAL  
AMAZÓNICA**

Parroquia Muyuna, kilómetro 7 vía  
a Alto Tena  
Tena - Ecuador  
[ikiam.edu.ec](http://ikiam.edu.ec)

*Primera edición*

**ISBN:** 978-9907-9549-0-6

**DOI:** 10.48661/SPPG-SA92

Tena, Ecuador

Junio de 2024



This book is licensed by Creative Commons,  
Attribution-NonCommercial 4.0 International  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

# **¡Bienvenidos al Cálculo Integral!**

Willin Gabriel Álvarez Irausquin

**Universidad Regional Amazónica Ikiam  
Facultad de Ciencias Socio Ambientales**

# Índice

Prólogo	07
Introducción	08

<b>1</b>	<b>LA ANTIDERIVADA</b>	
	Integral indefinida	10
	Teorema 1: Unicidad de las antiderivadas	11
	Notación	12
	Integrales inmediatas o reglas de integración	12
	Algoritmo general para la resolución de las integrales	15

<b>2</b>	<b>INTEGRALES INMEDIATAS</b>	
	Integrales inmediatas	17
	Ejercicios propuestos	28
	Integrales inmediatas bajo el signo del diferencial o regla de la cadena	30

<b>3</b>	<b>INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN</b>	
	Método de sustitución	39
	Integrando que contiene funciones cuadráticas	44
	Sustitución trigonométrica	47
	Ejercicios propuestos	51

<b>4</b>	<b>INTEGRACIÓN POR PARTES (IPP)</b>	
	Funciones algebraicas	52
	Funciones exponenciales	53
	Funciones logarítmicas	53
	Funciones trigonométricas	54
	Fórmula de la integración por partes	54
	Ejercicios propuestos	66

<b>5</b>	<b>PROFUNDIZACIÓN EN LA INTEGRACIÓN</b>	
	Profundizando en la integración	67
<b>6</b>	<b>ALGUNAS APLICACIONES</b>	
	Ecuaciones diferenciales ordinarias	78
	Ejercicios propuestos	83
	La integral definida y el cálculo de áreas entre curvas	83
	Teorema de evaluación de las integrales	83
	Propiedades básicas de las integrales	86
	Área entre curvas	86
	Ejercicios propuestos	87



## Prólogo

No quiero que esta frase sea únicamente una expresión, es mi forma de darte la bienvenida al fascinante mundo del cálculo integral. He tenido un recorrido de más de treinta años enseñando cálculo y me ha cautivado, especialmente, lo relacionado con las integrales. Se han escrito muchos libros sobre este tema, unos cuantos de muy buena calidad. En este sentido, no pretendo competir con nadie, ni tampoco realizar un libro de cálculo; más bien, quiero que estas cortas líneas sean una introducción muy informal, que te permitan, querido estudiante, tener herramientas básicas para luego leer los libros ya creados con la formalidad matemática rigurosa. En mi trayectoria he estado en muchas discusiones sobre las bases que debe tener un estudiante antes de realizar los cursos de cálculo y su “mala preparación” de bachillerato. Por eso, esta guía tiene la mayoría de los ejercicios resueltos, algunos están incompletos; les falta tu sabor, tu chispa, tu entusiasmo... Quiero que lo completes. ¡Vamos!, ¡Eres bienvenido y bienvenida!

Te invito a utilizar las siguientes estrategias para los ejercicios:

1. Sé constante, consciente y no te mientas. Cree en ti tanto como yo lo hago.
2. Disfruta cada fase del aprendizaje sin desesperarte.
3. Observa cómo resuelvo el ejercicio y escribe lo que no entiendes. Revisa tu conocimiento previo o base matemática. Si es necesario, ¡pide ayuda!
4. Intenta resolverlo nuevamente, justificando cada paso (repítelo tres veces).
5. Ahora, resuelve el mismo ejercicio sin ver los pasos sugeridos por mí, hasta que puedas ejecutarlo sin ayuda de nadie (repítelo tres veces).
6. Crea una nueva forma de resolverlo, más corta, o más larga, o más explícita, o más “tuya”.
7. Crea un grupo con dos o tres compañeros para hacer discusiones provechosas.
8. Cuando ya hayas aprendido, tira a un lado (o la basura) esta guía y ¡ve a los libros de cálculo!

Reciban mi abrazo, ¡bienvenidos al cálculo integral!

Willin Gabriel

## Introducción

En este libro, encontrarás una introducción amena y accesible a los conceptos clave del cálculo integral. A través de una cuidadosa selección de ejercicios resueltos y propuestos, así como de una metodología de estudio diseñada para fomentar el pensamiento crítico y la autonomía académica, te invito a explorar y profundizar en tus conocimientos en este apasionante campo de las matemáticas. Cabe destacar que este libro es únicamente para cálculo integral; es necesario que el estudiante tenga conocimientos en cálculo diferencial, así como en los teoremas y propiedades en esta área del conocimiento.

Cada capítulo está estructurado de manera didáctica y ordenada, abordando temas que van desde la antiderivada hasta dos aplicaciones de la integral: la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y el cálculo de áreas entre curvas. Además, encontrarás sugerencias y consejos prácticos para enfrentarte a los desafíos del estudio del cálculo integral, así como estrategias para optimizar tu proceso de aprendizaje y desarrollo académico.

En este primer capítulo, nos adentraremos en el fascinante mundo de la integral indefinida. Comenzaremos nuestro viaje explorando los fundamentos de este concepto fundamental del cálculo, que nos permite encontrar funciones cuya derivada es conocida. A lo largo de este capítulo, nos familiarizaremos con diversos aspectos relacionados con la antiderivada, desde su definición hasta su aplicación en la resolución de problemas matemáticos.

En primer lugar, abordaremos la noción de integral indefinida, que constituye la base sobre la que se construye todo el edificio teórico del cálculo integral. Exploraremos el concepto de antiderivada y su relación con la derivada de una función.

Además, revisaremos el Teorema 1 sobre la unicidad de las antiderivadas, que establece las condiciones necesarias y suficientes para que exista una función antiderivada de una función continua. Este teorema nos proporciona una comprensión más profunda de las propiedades de las antiderivadas y su aplicación en la resolución de problemas de cálculo integral.

Asimismo, nos adentraremos en la notación utilizada en el contexto de las integrales indefinidas, familiarizándonos con los símbolos y convenciones que se emplean para expresar este concepto matemático de manera precisa y concisa.

Por último, en este primer capítulo, conoceremos el algoritmo general para la resolución de integrales, una estrategia paso a paso que nos guiará en el proceso de encontrar la antiderivada de una función dada. Este algoritmo nos proporcionará una metodología clara y efectiva para enfrentarnos a una amplia variedad de problemas de cálculo integral.

En el segundo capítulo, nos sumergiremos en el estudio de las integrales inmediatas, explorando las técnicas y herramientas necesarias para abordar la resolución de integrales de manera rápida y eficiente. Comenzaremos nuestro recorrido revisando las definiciones básicas y las propiedades fundamentales de las integrales inmediatas, sentando así las bases para un estudio más profundo de este importante tema.

Primeramente, nos centraremos en las integrales inmediatas más comunes, que se resuelven mediante reglas predefinidas sin necesidad de aplicar técnicas de integración más avanzadas. Exploraremos estas reglas y aprenderemos a identificar los casos en los que pueden aplicarse, utilizando ejemplos concretos para ilustrar cada uno de los conceptos presentados.

Además, abordaremos las integrales inmediatas bajo el signo del diferencial o la regla de la cadena, una técnica fundamental que nos permite resolver integrales más complejas descomponiéndolas en integrales más simples. Mediante ejemplos prácticos, exploraremos la aplicación de esta regla y aprenderemos a utilizarla de manera efectiva en la resolución de problemas de cálculo integral.

En el tercer capítulo, nos adentraremos en el estudio de las integrales por sustitución, una técnica poderosa que nos permite abordar la resolución de integrales mediante la aplicación de cambios de variables apropiados. Comenzaremos nuestro recorrido revisando los fundamentos teóricos de esta técnica, explorando sus aplicaciones y sus implicaciones en el contexto del cálculo integral.

Es importante familiarizarnos con el método de sustitución, una estrategia fundamental que nos permite transformar una integral dada en una forma más manejable mediante la introducción de una nueva variable. Exploraremos los pasos necesarios para aplicar este método de manera efectiva, utilizando ejemplos concretos para ilustrar cada uno de los conceptos presentados. Nos adentraremos en el estudio de las integrales que contienen funciones cuadráticas, revisando las técnicas y herramientas necesarias para abordar la resolución de este tipo de integrales mediante la aplicación de cambios de variables adecuados. Mediante ejemplos prácticos, aprenderemos a identificar los casos en los que puede aplicarse esta técnica y a utilizarla de manera efectiva en la resolución de problemas de cálculo integral.

Nos adentraremos en el estudio de la sustitución trigonométrica, una técnica avanzada que nos permite abordar la resolución de integrales mediante la introducción de funciones trigonométricas adecuadas. Exploraremos los pasos necesarios para aplicar esta

técnica, así como las implicaciones geométricas de las transformaciones trigonométricas en el contexto de la resolución de problemas de cálculo integral.

En el cuarto capítulo, estudiaremos la integración por partes, una técnica fundamental en el cálculo integral que nos permite abordar integrales de productos de funciones mediante la aplicación de la regla del producto de derivación. A través de ejemplos y ejercicios prácticos, aprenderemos a aplicar esta técnica de manera efectiva para resolver una amplia variedad de problemas en el cálculo integral.

Comenzaremos con las funciones algebraicas y su integración por partes, desarrollando una comprensión profunda de la regla de integración por partes y su aplicación en la resolución de problemas prácticos. A través de ejemplos paso a paso, aprenderemos a identificar oportunidades para emplear esta técnica y desarrollaremos nuestras habilidades en la resolución de problemas de integración por partes. Exploraremos la integración por partes para funciones exponenciales y logarítmicas, así como para funciones trigonométricas. A través de ejemplos y ejercicios, aprenderemos a aplicar esta técnica en una amplia variedad de contextos y a desarrollar nuestras habilidades en la resolución de problemas de integración por partes en situaciones diversas.

En el quinto capítulo, tratamos la identificación de los casos de las integrales para alcanzar su solución. Presentamos la estrategia de los algoritmos para identificar entre integrales inmediatas, por sustitución y por partes, entre otras. Es importante destacar que este capítulo es de esencial importancia en la propuesta de este libro: “aprender a pensar cómo se aborda y resuelve una integral”.

# LA ANTIDERIVADA

## Introducción

Desde los primeros años de la infancia, los seres humanos son educados en el arte de realizar operaciones matemáticas fundamentales, tales como la suma, la resta, la multiplicación y la división. Estas operaciones no solo son esenciales en la vida cotidiana, sino que también están intrincadamente relacionadas entre sí, algunas incluso pueden considerarse como operaciones inversas, como la suma y la resta, o la

multiplicación y la división. Sin embargo, existen dos operaciones matemáticas que destacan por su relación especial: la derivación y la antiderivación, también conocida como integración. En este capítulo, exploraremos estas dos hermosas y poderosas operaciones matemáticas, haciendo énfasis en la integración, que es el tema fundamental de este libro.

## 1.1. La integral indefinida

La integral indefinida, o también llamada antiderivada de una función, se basa en la definición que veremos a continuación (Ashlock, 2022; Larson & Edwards, 2013). Con ella, podemos realizar integrales de forma inmediata; este es el caso más sencillo que se presenta en los problemas de integración. Miremos ahora una definición de antiderivada.

### Definición de antiderivada

Una función  $F$  se denomina antiderivada de una función  $f$  en un intervalo  $I$  si  $F'(x) = f(x)$  para todo valor de  $x$  en  $I$ .

### 1.1.1.- Ilustración

Para ilustrar la definición de antiderivada, usaremos como ejemplo una función constante  $a \in \mathbb{R}$ , dada como  $f(x) = a$ . Sabemos que la derivada de  $F_1(x) = ax$ , es igual a  $f(x) = a$ ; luego  $F_1$ , según la definición anterior, es una antiderivada de  $f(x)$ . Podemos ver de esto que existen un número infinito de funciones para las cuales se

cumple lo anterior. Concentremos nuestra atención en la Tabla 1, donde hemos tomado en cuenta cuatro funciones que pueden ser antiderivadas de  $f(x)$ . Nótese que estas varían tan solo en una constante que usualmente se denota como  $C$ .

**Tabla 1.** Ejemplos de antiderivadas de  $f(x) = a$

ANTIDERIVADA	CONSTANTE $C$	DERIVADA $f(x)$
$F_2(x) = ax + 4$	4	$f(x) = a$
$F_3(x) = ax - 4$	- 4	$f(x) = a$
$F_4(x) = ax + 3/4$	3/4	$f(x) = a$
$F_5(x) = ax + \pi$	$\pi$	$f(x) = a$

De la Tabla 1 podemos concluir que la antiderivada no es única para una función dada, pero podemos escribir una expresión general algebraica que nos ayudaría a caracterizar a la familia de soluciones encontradas. Para ello usaremos el teorema 1 (Larson & Edwards, 2013).

**Teorema 1: Unicidad de las antiderivadas**

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones definidas en el intervalo  $I$  de  $R$ , tales que  $f'(x) = g'(x)$  para todo valor de  $x$  en  $I$ . Entonces existe una constante  $C$  tal que:  $f(x) = g(x) + C$  todo valor de  $x$  en  $I$ .

Este teorema muestra que la antiderivada de una función no es única, ya que, dadas dos funciones con derivadas iguales, estas difieren por lo menos en una constante. A esta la podemos llamar constante de integración, en Larson & Edwards (2013) puedes encontrar una fácil demostración de este teorema.

**Corolario 1: Antiderivada general o integral**

Si  $F$  es una antiderivada particular de  $f$  en el intervalo  $I$  de  $R$ , entonces cada antiderivada de  $f$  en  $I$  está dada por

$$F(x) + C$$

donde  $C$  es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de  $f$  pueden definirse dándole valores a  $C$  en  $F(x) + C$

El corolario 1, nos permite ver a la integral como un proceso u operación matemática, tal como lo es la suma. Además, sabemos que para cada operación matemática existe una operación inversa u opuesta. Por ejemplo, para el caso de la suma es la resta, para la multiplicación la división. En este sentido, puede verse a la antiderivada como la operación inversa de la derivada. Llamaremos antidiferenciación o integración al proceso mediante el cual se encuentra a la antiderivada general de una función. Esta solución nos brinda una familia de soluciones cuando hablamos de la antiderivada de una función.

## 1.2. Notación

Es conveniente; identificar cuando estamos buscando la antiderivada más general o, simplemente, integral de una función. Para simplificar el corolario 1 usaremos la siguiente notación:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde:

$\int$ : esta S estilizada se lee “integral de o la integral de” y expresa que debemos buscar la antiderivada general de la función que viene a continuación.

$f(x)$ : es la función que llamaremos integrando, debemos buscar la integral de esta función objetivo.

$dx$ : es el diferencial de la variable independiente; es sumamente importante ya que nos dice cuál es la variable de integración, es decir, cualquier otra letra o elemento algebraico será tomado como una constante.

$F(x)$ : es la antiderivada particular de  $f(x)$  sin considerar la constante de integración.

$C$ : es la constante de integración.

## 1.3. Integrales inmediatas o reglas de integración

Una vez que hemos definido la integral de una función, según la ecuación (1), debemos considerar que existen integrales que se llaman inmediatas. Estas reciben dicho nombre debido a que al derivar la expresión  $F(x)+C$  podemos encontrar el integrando. Como ilustración, mostraremos la comprobación de la aseveración de que  $\int \frac{du}{u^2+a^2}$  es  $\frac{1}{a} \arctg \left( \frac{u}{a} \right) + C$ .

Ejemplo ilustrativo 1: Demuestre que

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

Demostración:

Llamemos  $G(u) = \frac{1}{a} \arctg \left( \frac{u}{a} \right) + C$

Derivando a  $G(u)$  con respecto a  $u$ , obtenemos:

$$\frac{d[G(u)]}{du} = \frac{1}{a} \frac{d[\arctg \left( \frac{u}{a} \right)]}{du} + \frac{d[C]}{du}$$

$$\frac{d[G(u)]}{du} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1+\frac{u^2}{a^2}} \frac{d \left( \frac{u}{a} \right)}{du} \right) + 0$$

$$\frac{d[G(u)]}{du} = \frac{1}{a} \left( \frac{a^2}{a^2+u^2} \frac{1}{a} \right)$$

$$\frac{d[G(u)]}{du} = \frac{a^2}{a^2} \left( \frac{1}{a^2+u^2} \right)$$

$$\therefore \frac{d[G(u)]}{du} = \frac{1}{u^2 + a^2}$$

Esto demuestra que:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

A continuación, podemos apreciar las reglas básicas de la integración, que se derivan de los teoremas y corolarios anteriores:

### REGLAS DE INTEGRACIÓN

$$1. \int a dx = ax + C$$

$$2. \int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$3. \int \left( \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right) dx = \int (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_{n-1} f_{n-1}(x) + a_n f_n(x)) dx$$

$$= a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx + \dots + a_{n-1} \int f_{n-1}(x) dx + a_n \int f_n(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx$$

$$4. \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du; u = ax + b$$

$$5. \int F[f(x)] dx = \int F(u) \frac{1}{u'} du; u = f(x), u' = \frac{df(x)}{dx}$$

$$6. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$$

$$7. \int \frac{du}{u} = \ln u + C$$

$$8. \int e^u du = e^u + C$$

$$9. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; a > 0; a \neq 1$$

$$10. \int \operatorname{sen}(u) du = -\operatorname{cos}(u) + C$$

$$11. \int \operatorname{cos}(u) du = \operatorname{sen}(u) + C$$

$$12. \int \operatorname{tg}(u) du = \ln \operatorname{sec}(u) + C = -\ln \operatorname{cos}(u) + C$$

$$13. \int \operatorname{cotg}(u) du = \ln \operatorname{sen}(u) + C$$

$$14. \int \operatorname{sec}(u) du = \ln[\operatorname{sec}(u) + \operatorname{tg}(u)] + C = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$$

$$15. \int \operatorname{cosec}(u) du = \ln[\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)] + C = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} \right) + C$$

$$16. \int \operatorname{sec}^2(u) du = \operatorname{tg}(u) + C$$

$$17. \int \operatorname{cosec}^2(u) du = -\operatorname{cotg}(u) + C$$

$$18. \int \operatorname{tg}^2(u) du = \operatorname{tg}(u) - u + C$$

$$19. \int \operatorname{sec}(u) \operatorname{tg}(u) du = \operatorname{sec}(u) + C$$

$$9. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; a > 0; a \neq 1$$

$$10. \int \text{sen}(u) du = -\cos(u) + C$$

$$11. \int \cos(u) du = \text{sen}(u) + C$$

$$12. \int \text{tg}(u) du = \ln \sec(u) + C = -\ln \cos(u) + C$$

$$13. \int \text{cotg}(u) du = \ln \text{sen}(u) + C$$

$$14. \int \sec(u) du = \ln[\sec(u) + \text{tg}(u)] + C = \ln \text{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$15. \int \text{cosec}(u) du = \ln[\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)] + C = \ln \text{tg}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$16. \int \sec^2(u) du = \text{tg}(u) + C$$

$$17. \int \text{cosec}^2(u) du = -\text{cotg}(u) + C$$

$$18. \int \text{tg}^2(u) du = \text{tg}(u) - u + C$$

$$19. \int \sec(u) \text{tg}(u) du = \sec(u) + C$$

$$20. \int \text{cosec}(u) \text{cotg}(u) du = -\text{cosec}(u) + C$$

$$21. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$22. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C = -\frac{1}{a} \text{arccotgh}\left(\frac{u}{a}\right) + C; u^2 > a^2$$

$$23. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C = \frac{1}{a} \text{arctgh}\left(\frac{u}{a}\right) + C; a^2 > u^2$$

$$24. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$25. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C = \text{arcsenh}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$26. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$$

$$27. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$

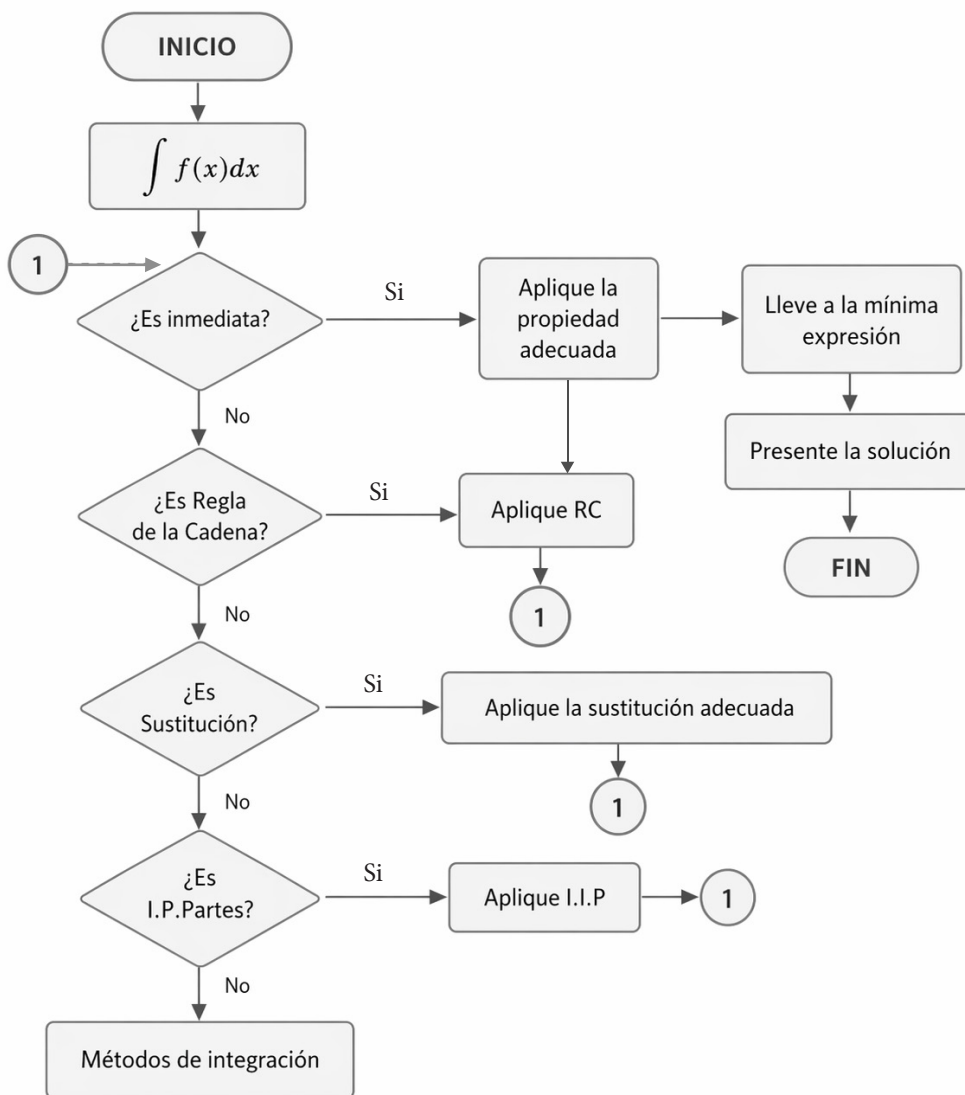
$$28. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$$

$$29. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right) + C$$

Cada una de las reglas anteriores las podemos deducir o verificar derivando el miembro de la derecha, aunque debe destacarse que algunas de las derivadas no son tan triviales. Una vez que has podido observar cómo es el proceso para comprobar cada una de las 29 básicas de integración, te animo a que demuestres las demás. Esto te dará una destreza muy importante y te ayudará a recordar cada una de estas reglas con un menor esfuerzo, más allá de la simple memorización, diversos autores (Larson & Edwards, 2013; Ashlock, 2022; Hass et al., 2023; Purcell et al., 2012) desarrollan demostraciones rigurosas de cada una de estas reglas; apoyarse en estas referencias permite afrontar y resolver las dificultades que emergen durante la construcción de demostraciones.

### 1.4. Algoritmo general para la resolución de las integrales

Una de las razones por las que algunos estudiantes fracasan en su propósito de resolver integrales es que no tienen un método para ello. Te sugiero el siguiente algoritmo para el desarrollo de las integrales; apréndelo, te dará buenos resultados. Lo desarrollaremos poco a poco, a medida que avancemos. El objetivo es que puedas apropiarte de él para la resolución de cualquier integral.



El algoritmo inicia con el planteamiento de encontrar la integral de  $\int f(x) dx$ . El primer paso es preguntarte si la integral es inmediata, es decir, cuál de las 29 reglas se “parece” a la función que está como integrando, para buscar una manera de llegar al miembro de la derecha (la función primitiva o integral). En el próximo capítulo trataremos este tema.

Una de las dificultades que se les presentan a los estudiantes cuando van a resolver un problema que involucra el cálculo integral es: ¿por dónde comienzo?

Este algoritmo se puede resumir así:

**Paso 1:** Primero pregúntate si la integral es inmediata. Si es así, has determinado cuál de las propiedades se parece al integrando. Una vez que has elegido la propiedad correcta, debes escribir lo mejor posible al integrando para usar la regla, esto lo veremos mejor en el capítulo siguiente. Una vez aplicada la regla para encontrar la antiderivada, integral o “primitiva”, debes llevarla a la mínima expresión para presentar el resultado.

**Paso 2:** Este paso se deriva de una respuesta negativa a la pregunta del paso 1. Puede ser que la integral sea inmediata, pero no lo vemos tan simple; en este caso, pensemos primero en usar la regla de la cadena para la integración o integración bajo el signo del diferencial. Una vez que hemos precisado que la integral es un caso de regla de la cadena, la aplicamos y volvemos al paso 1.

**Paso 3:** Si en el paso anterior determinamos que el caso no es regla de la cadena, entonces intentemos con un cambio de variable o sustitución. Esta opción nos puede ayudar a encontrar la sustitución adecuada para llegar a la regla de la cadena. A veces, debemos de hacer más de un cambio de variable. Si encuentras la sustitución adecuada pasarás, nuevamente al paso 2. Si no encuentras la sustitución adecuada, quizá estés en presencia de un caso de la integración por partes; es decir, pasarás al paso 4.

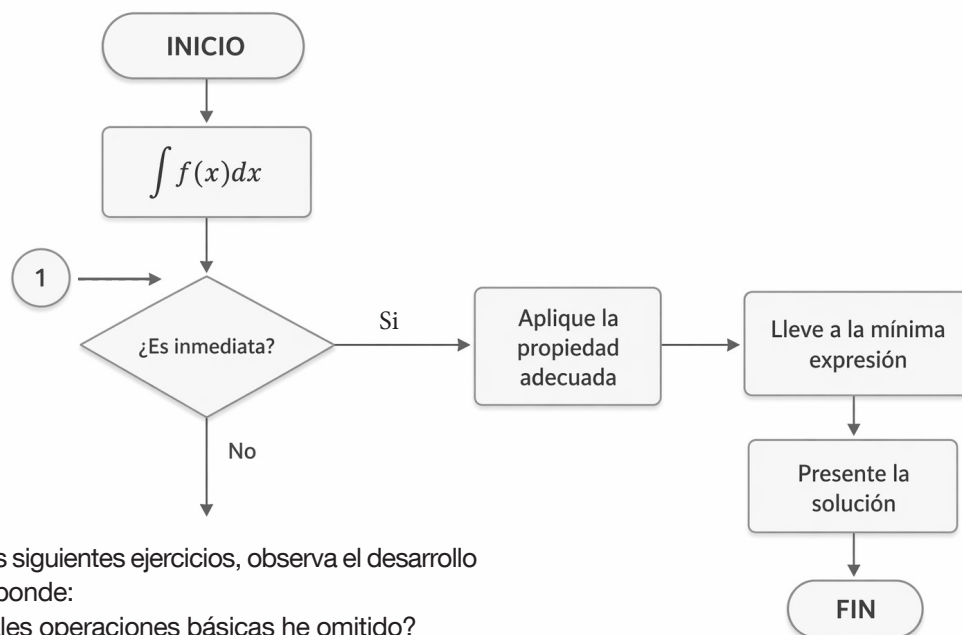
**Paso 4:** Si has llegado a este paso en el algoritmo es que has obtenido una respuesta negativa en los pasos anteriores. Veremos más adelante que hay que observar muy bien la forma del integrando para aplicar esta técnica de integración, si no puedes determinar que la integral guarde algún caso propio de integración por partes. Entonces, debes precisar si estás en presencia de algún método de integración particular y debes pasar al paso 5, que consiste en aplicar el método de integración adecuado.

En este libro trataremos de explicarte como caminar a través de los distintos pasos del algoritmo para lograr la resolución de la integral buscada.

# INTEGRALES INMEDIATAS

## 2.1.- Integrales inmediatas

Cuando hablamos de integrales inmediatas (Asvi & Ignu, 2020; Demidovich, 1969; Edwards, 2022; Feldman et al., 2023; Larson & Edwards, 2013), nos referimos a aquellas que se resuelven con la aplicación de las propiedades o reglas de integración que se presentaron anteriormente. Pero ten cuidado: a veces debemos hacer operaciones matemáticas básicas antes de la aplicación de la regla adecuada. Al presentarse la integral que quieres resolver, primero pregúntate: ¿es inmediata? Si es así, aplica la propiedad adecuada. Para ello, observa bien la forma del integrando y compáralo con las reglas de integración inmediata; luego lleva el resultado a una expresión lo más precisa posible. Así, ya has integrado.



En los siguientes ejercicios, observa el desarrollo y responde:

- ¿Cuáles operaciones básicas he omitido?
- ¿Qué reglas de integración utilicé?

## 2.1.1- Integrales inmediatas bajo el signo del diferencial o regla de la cadena

Comenzaremos esta aventura de integral con el siguiente ejemplo (Demidovich, 1969):

---

$$\text{Ejemplo 2.1.1 } I = \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$$

---

Recuerda que para resolver estos ejercicios primero tienes que observar muy bien el integrando. No te mentiré, aquí tienes que recordar muy bien tu conocimiento previo de las matemáticas. Quizás pienses: ¿por qué no empezamos con un ejercicio más sencillo? La respuesta es que necesito que te hagas grandes retos desde el principio.

Pasos previos:

1) Observemos el integrando antes de aplicar alguna de las reglas de integración. Podemos decir que el integrando es:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}$$

Si miras con detenimiento, no hay una regla que se parezca a nuestro integrando. Pero no nos desanimemos... ¡tú puedes! Sí, puedes. Mira nuevamente y elige una o dos reglas; juguemos a la que más se parece:

Para ello, tomemos el denominador de  $f(x)$ ,  $\sqrt{4-x^4}$  y veamos qué propiedades pudieran parecerse. Te sugiero las siguientes:

---

$$24. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

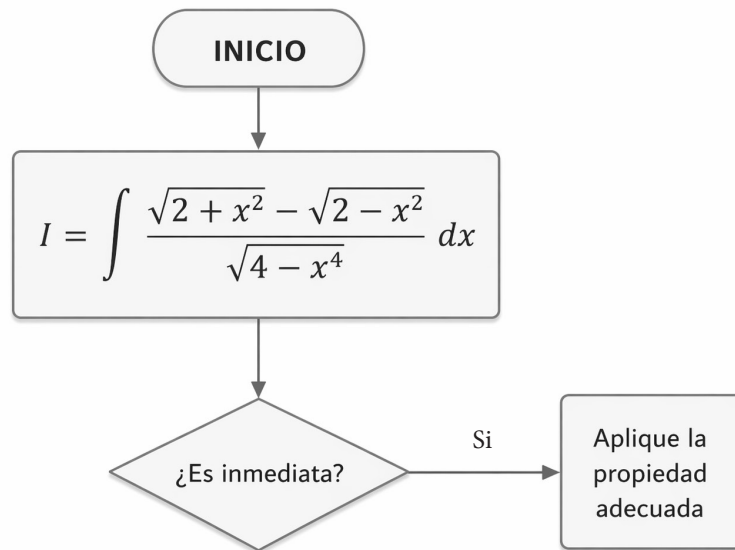
---

$$25. \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + C = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

---

Hay un detalle: en la expresión  $\sqrt{4-x^4}$ , la variable  $x$  tiene exponente 4. Bueno, esa es una de las tantas cosas que debemos aprender: algunas integrales vienen disfrazadas, ocultas; la idea es que “reten” nuestro conocimiento previo. No te rindas. A continuación, te muestro cómo llegar a la aplicación de estas dos fórmulas.

En nuestro algoritmo estamos por acá



Recuerda que:  $\frac{A \pm B}{C} = \frac{A}{C} \pm \frac{B}{C}$  (2)

Apliquemos esto en el integrando:

Llamemos:

$$A = \sqrt{2 + x^2}, B = \sqrt{2 - x^2} \text{ y } C = \sqrt{4 - x^4}$$

Usemos ahora la expresión (2), en el integrando

$$I = \int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} - \frac{\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx$$

En el integrando ahora tenemos la diferencia de dos expresiones o una suma algebraica. La regla de integración 3 expresa que la integral de la suma es la suma de las integrales. Recordemos esta propiedad:

$$\begin{aligned}
3. \int \left( \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right) dx &= \int (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_{n-1} f_{n-1}(x) + a_n f_n(x)) dx \\
&= a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx + \dots + a_{n-1} \int f_{n-1}(x) dx \\
&\quad + a_n \int f_n(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx
\end{aligned}$$

Esto lo podemos escribir como:

$$I = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$$

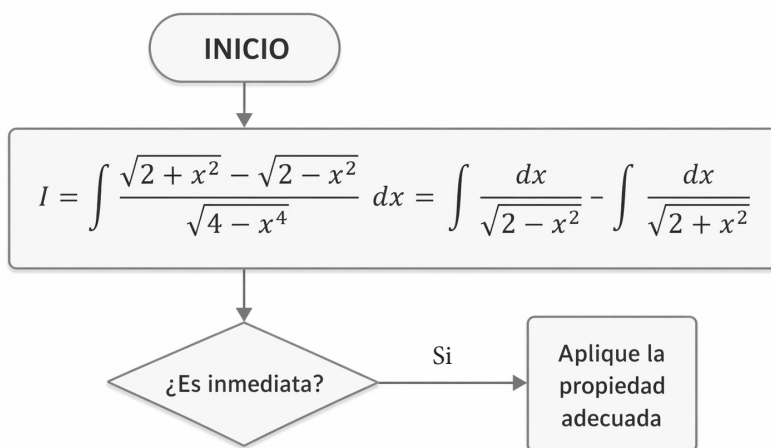
Ahora bien, el polinomio  $4 - x^4$  se puede reescribir como  $2^2 - (x^2)^2$ . Esta nueva forma nos permite factorizar de la siguiente manera:  $4 - x^4 = (2+x^2) \cdot (2-x^2)$ . Sustituyendo esta factorización en  $I$ , obtenemos:

$$I = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{(2+x^2) \cdot (2-x^2)}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2+x^2) \cdot (2-x^2)}} dx$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{\frac{2+x^2}{(2+x^2) \cdot (2-x^2)}} dx - \int \sqrt{\frac{2-x^2}{(2+x^2) \cdot (2-x^2)}} dx \\
I &= \int \sqrt{\frac{1}{2-x^2}} dx - \int \sqrt{\frac{1}{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = I_1 - I_2
\end{aligned}$$

Observa que al intentar aplicar el algoritmo buscamos las soluciones de dos integrales,  $I_1$  e  $I_2$ . La integral original puede verse a continuación:



Una vez que hemos llegado hasta aquí aplicamos las propiedades

---

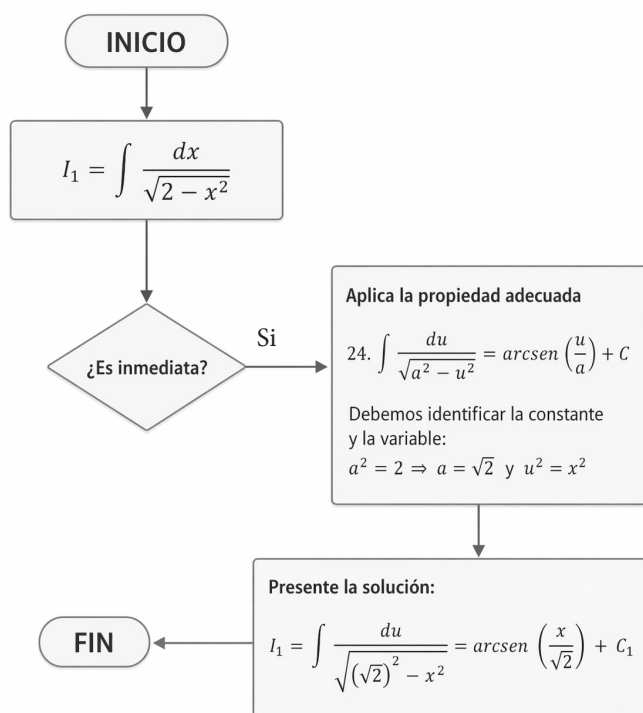

$$24. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$


---

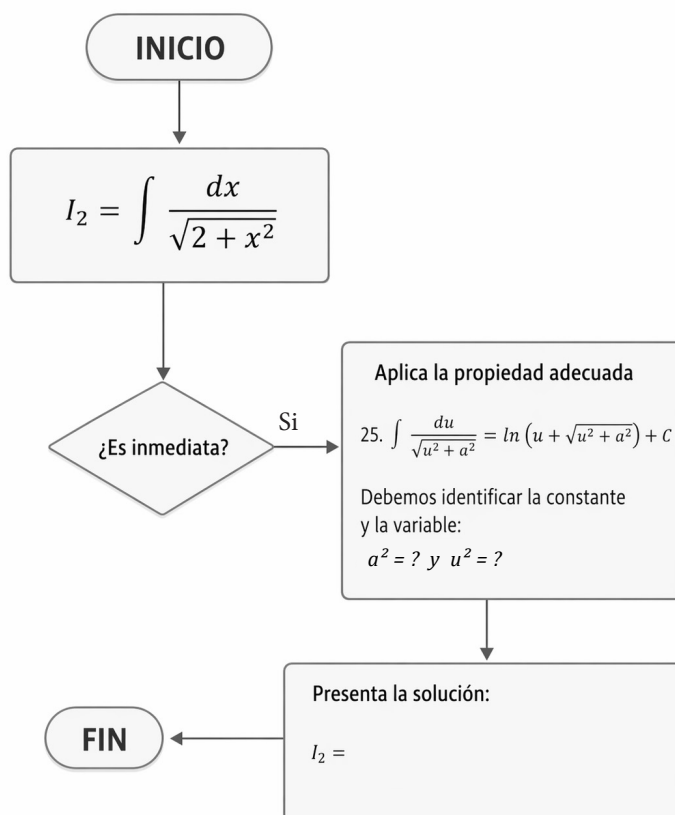
$$25. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$


---

Para la integral  $I_1$  procedemos como sigue:



Ahora completa el siguiente algoritmo para  $I_2$



Una vez que hemos encontrado tanto a  $I_1$  como a  $I_2$ , se hace la diferencia de las integrales y se presenta la solución final:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

**Comentario:** Debes reflexionar sobre todo lo que hicimos antes de resolver la integral. Primero, recurrimos a la regla de fracciones:

$$\frac{A \pm B}{C} = \frac{A}{C} \pm \frac{B}{C}$$

Aplicamos la propiedad de linealidad:

$$\begin{aligned} \int \left( \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right) dx &= \int (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_{n-1} f_{n-1}(x) + a_n f_n(x)) dx \\ &= a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx + \dots + a_{n-1} \int f_{n-1}(x) dx \\ &\quad + a_n \int f_n(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \end{aligned}$$

Luego, tuvimos que factorizar aplicando la regla:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

También simplificamos y operamos adecuadamente hasta obtener una expresión que nos permitiera integrar.

Esto nos dice que para la integral debemos recurrir a nuestro conocimiento previo de matemáticas. Es importante que estemos claros en todas las operaciones matemáticas. Al parecer, muchas integrales parecen estar “disfrazadas” hasta que logramos llevarla a una expresión inmediata; toma eso siempre en cuenta.

Escribe cuáles son los conocimientos previos que se necesitan para resolver las siguientes integrales. Haz el diagrama de flujo para integrales inmediatas, luego resuelve los ejemplos ilustrativos y tomados de (Demidovich, 1969):

**Ejemplo 2.1.2.**  $R = \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4 = \binom{4}{0} (\sqrt{a})^4 (-\sqrt{x})^0 + \binom{4}{1} (\sqrt{a})^3 (-\sqrt{x})^1 + \binom{4}{2} (\sqrt{a})^2 (-\sqrt{x})^2 + \binom{4}{3} (\sqrt{a})^1 (-\sqrt{x})^3 + \binom{4}{4} (\sqrt{a})^0 (-\sqrt{x})^4$$

$$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1, \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{2} = 6$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4 = 1 \cdot (\sqrt{a})^4 (\sqrt{x})^0 - 4 \cdot (\sqrt{a})^3 (\sqrt{x})^1 + 6 \cdot (\sqrt{a})^2 (\sqrt{x})^2 - 4 \cdot (\sqrt{a})^1 (\sqrt{x})^3 + 1 \cdot (\sqrt{a})^0 (\sqrt{x})^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax}} = \frac{1}{(ax)^{1/2}} = (ax)^{-1/2}$$

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} = (ax)^{-1/2} (a^2 - 4a^{3/2} x^{1/2} + 6ax - 4a^{1/2} x^{3/2} + x^2)$$

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} = a^2 a^{-1/2} x^{-1/2} - 4a^{3/2} a^{-1/2} x^{-1/2} x^{1/2} + 6a a^{-1/2} x^{-1/2} x$$

$$- 4a^{1/2} a^{-1/2} x^{-1/2} x^{3/2} + a^{-1/2} x^{-1/2} x^2$$

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} = a^{3/2} x^{-1/2} - 4a + 6a^{1/2} x^{1/2} - 4x + a^{-1/2} x^{3/2}$$

$$R = \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx = \int (a^{3/2} x^{-1/2} - 4a + 6a^{1/2} x^{1/2} - 4x + a^{-1/2} x^{3/2}) dx$$

$$R = \int a^{3/2} x^{-1/2} dx - \int 4a dx + \int 6a^{1/2} x^{1/2} dx - \int 4x dx + \int a^{-1/2} x^{3/2} dx$$

$$R = a^{3/2} \int x^{-1/2} dx - 4a \int dx + 6a^{1/2} \int x^{1/2} dx - 4 \int x dx + a^{-1/2} \int x^{3/2} dx$$

$$R = 2a^{3/2} x^{1/2} - 4ax + 6 \cdot \frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2} - 4 \frac{x^2}{2} + \frac{2}{5} a^{-1/2} x^{5/2} + C$$

$$R = \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx = 2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^2\sqrt{ax}}{5a} + C$$

$$\therefore R = \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx = \sqrt{ax} \left( 2a - 4\sqrt{ax} + 4x - \frac{2x^2}{\sqrt{ax}} + \frac{2x^2}{5a} \right) + C \blacksquare$$

**Comentario:** Parece que este ejercicio nos ha hecho pensar mucho sobre los prerrequisitos que necesitamos para resolverlo y lo largo que puede ser el proceso. Pero atención: más adelante veremos unos métodos interesantes que nos pueden ayudar a solucionar de una forma corta y sencilla este tipo de problemas. Así que pendientes con la regla de la cadena y el método de sustitución.

---

**Ejemplo 2.1.3.**  $I = \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$

---

Para la integral del ejemplo 2.1.3, vamos a aplicar la regla 6, que se enuncia como sigue:

Regla 6:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$$

Observa que nuestra variable de integración es  $x$ , esto debido al diferencial de la integral. Para resolver este ejercicio, te recomiendo que revises las técnicas de potenciación:

Preguntas que debes considerar:

1) ¿Qué regla de potenciación nos permite realizar la siguiente operación?

$$(nx)^{\frac{1-n}{n}} = n^{\frac{1-n}{n}} x^{\frac{1-n}{n}}$$

2) ¿Qué regla de integración nos permite realizar la siguiente operación?

$$\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx$$

Después de justificar los pasos anteriores, trata de hacer una identificación y justificación de las operaciones matemáticas. Consulta tus ideas con el profesor o tu equipo de trabajo.

$$I = \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1-n}{n} + \frac{n}{n}}}{\frac{1-n}{n} + \frac{n}{n}} + C$$

$$I = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} + C = n^{\frac{1-n}{n}} nx^{\frac{1}{n}} + C = n^{\frac{1-n+n}{n}} \sqrt[n]{x} + C = n^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{x} + C$$

---


$$\therefore I = \sqrt[n]{nx} + C \blacksquare$$


---

Queremos seguir ejercitándonos en la regla 6. Es importante que ejercites las reglas de factorización. Observa bien el integrando y escribe a continuación cuál fue la regla de factorización que se empleó en la resolución de la integral.

Escribe qué reglas de integración se utilizaron para poder resolver el ejercicio.

---

**Ejemplo 2.1.4.**  $R = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

---

$$R = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x^4 - 2x^2 + x^2 - 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x^4 - 2x^2 + x^2 - 2}{x^{2/3}} dx$$

$$R = \int x^{-2/3}(x^4 - 2x^2 + x^2 - 2) dx = \int (x^{-2/3} \cdot x^4 - x^{-2/3} \cdot x^2 - x^{-2/3} \cdot 2) dx$$

$$R = \int x^{10/3} dx - \int x^{4/3} dx - 2 \int x^{-2/3} dx = \frac{3}{13} x^{13/3} - \frac{3}{7} x^{7/3} - 6x^{1/3} + C$$

---


$$\therefore R = \frac{3x^4 \sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2 \sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + C \blacksquare$$


---

En el siguiente ejercicio no te confundas. Podrías pensar que estamos en presencia de la propiedad o regla de integración número 6, pero no es así. Identifica la nueva regla de integración y la propiedad de potenciación que hemos usado para resolver el problema.

---

**Ejemplo 2.1.5.**  $I = \int 3^x e^x dx$

---

$$I = \int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \frac{(3e)^x}{\ln 3 + \ln e} + C = \frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1} + C$$

---


$$\therefore I = \frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1} + C \blacksquare$$


---

En el ejemplo 2.1.6, estamos seguros de que podrás usar la regla

$$23. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{a+u}{a-u} \right) + C; a^2 > u^2$$

Hemos aplicado especialmente una factorización o puedes ver que en la fracción del integrando se ha dividido tanto el numerador como el denominador por  $(a - b)$ . Luego, nos valemos de la identidad  $(\sqrt{a})^2 = a$ . Encierra en un círculo la expresión donde hemos utilizado la identidad anterior.

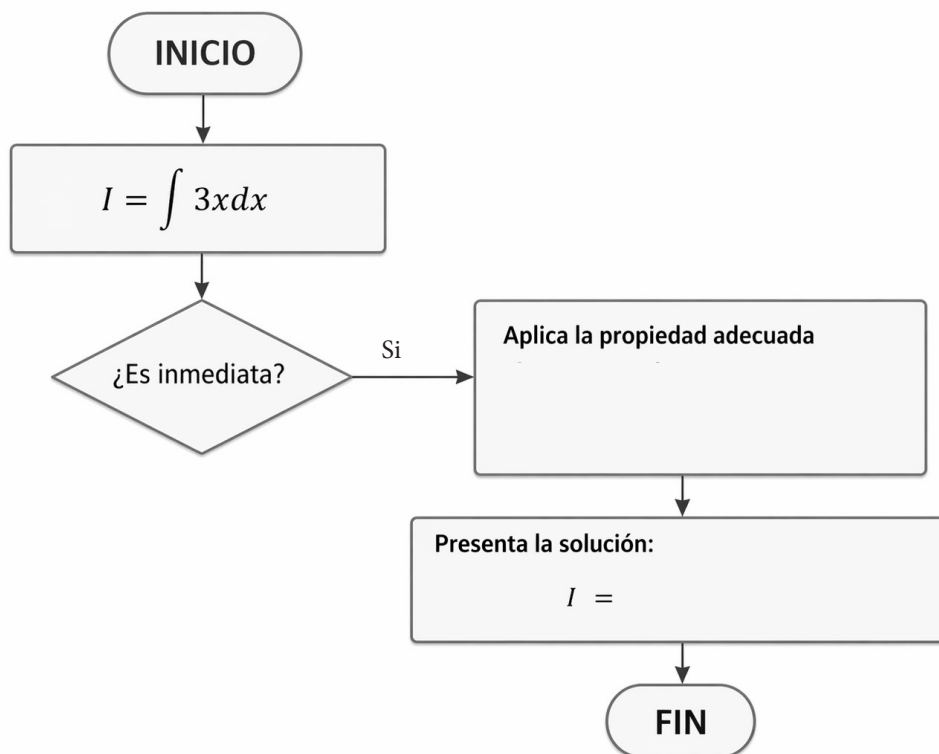
**Ejemplo 2.1.6.**  $I = \int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ ; ( $0 < b < a$ )

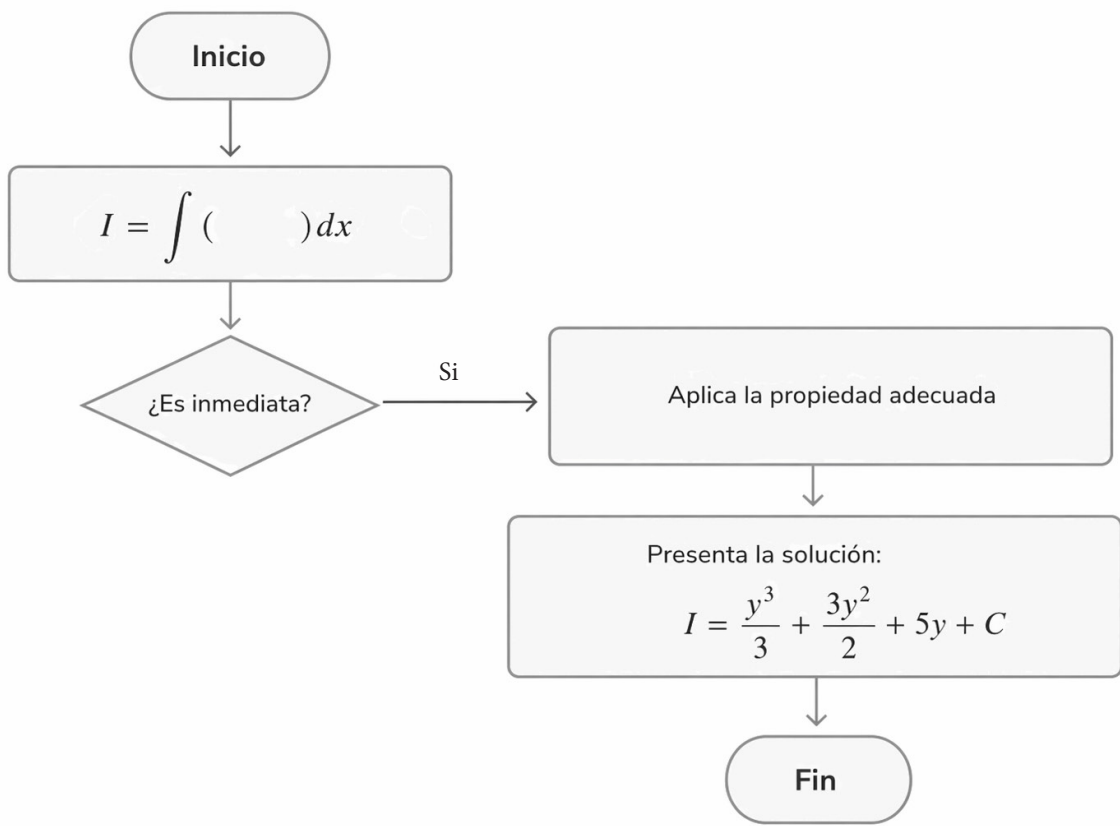
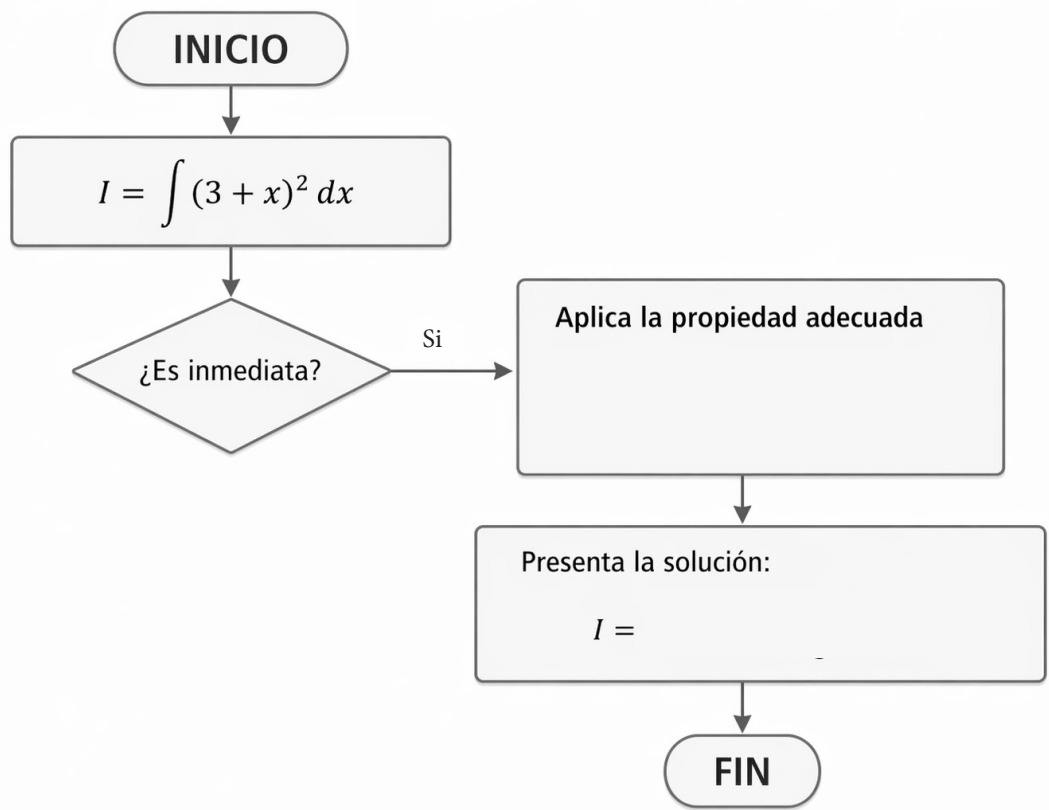
$$I = \frac{1}{(a-b)} \int \frac{dx}{\frac{(a+b)}{(a-b)} - x^2} = \frac{1}{(a-b)} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{(a+b)}{(a-b)}}\right)^2 - x^2} = \frac{1}{2(a-b)\sqrt{\frac{(a+b)}{(a-b)}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{(a+b)}{(a-b)}} + x}{\sqrt{\frac{(a+b)}{(a-b)}} - x} \right| + C$$

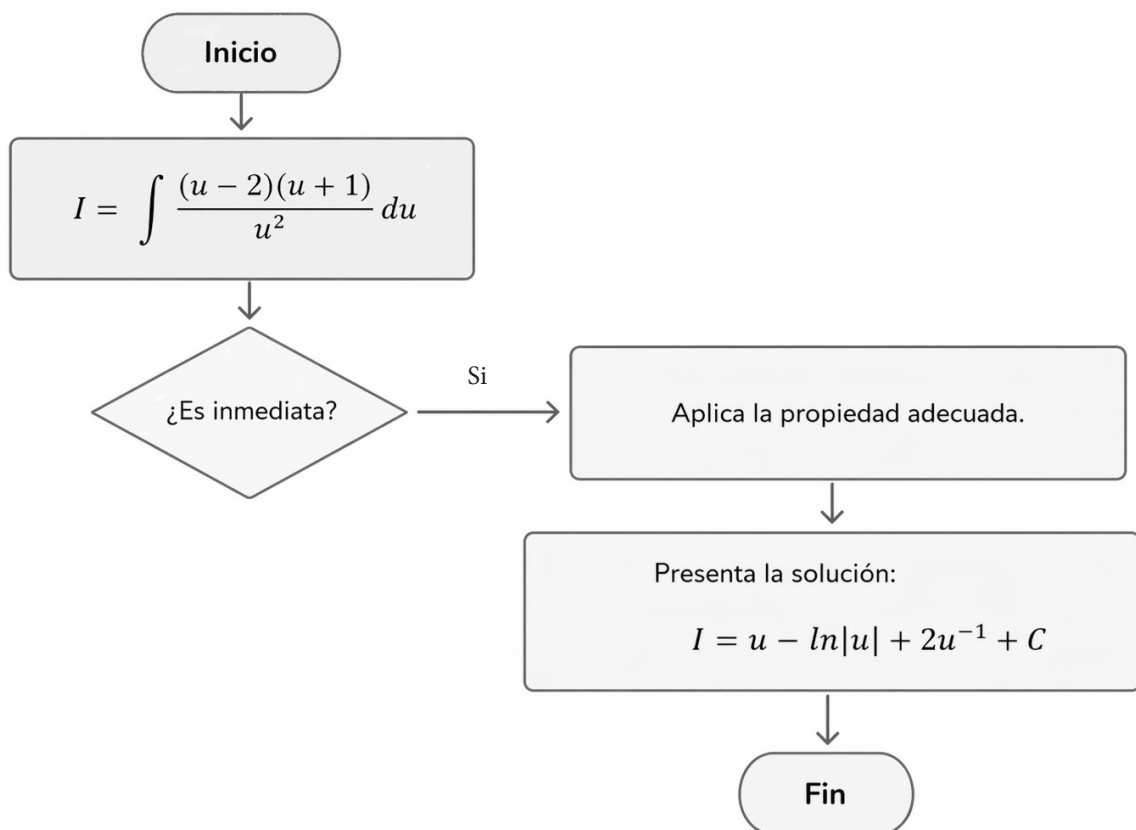
$$I = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)^2}{(a-b)}}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+b)} + x\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)} - x\sqrt{(a-b)}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+b)} + x\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)} - x\sqrt{(a-b)}} \right| + C$$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+b)} + x\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)} - x\sqrt{(a-b)}} \right| + C \blacksquare$$

## 2.2. Ejercicios propuestos:







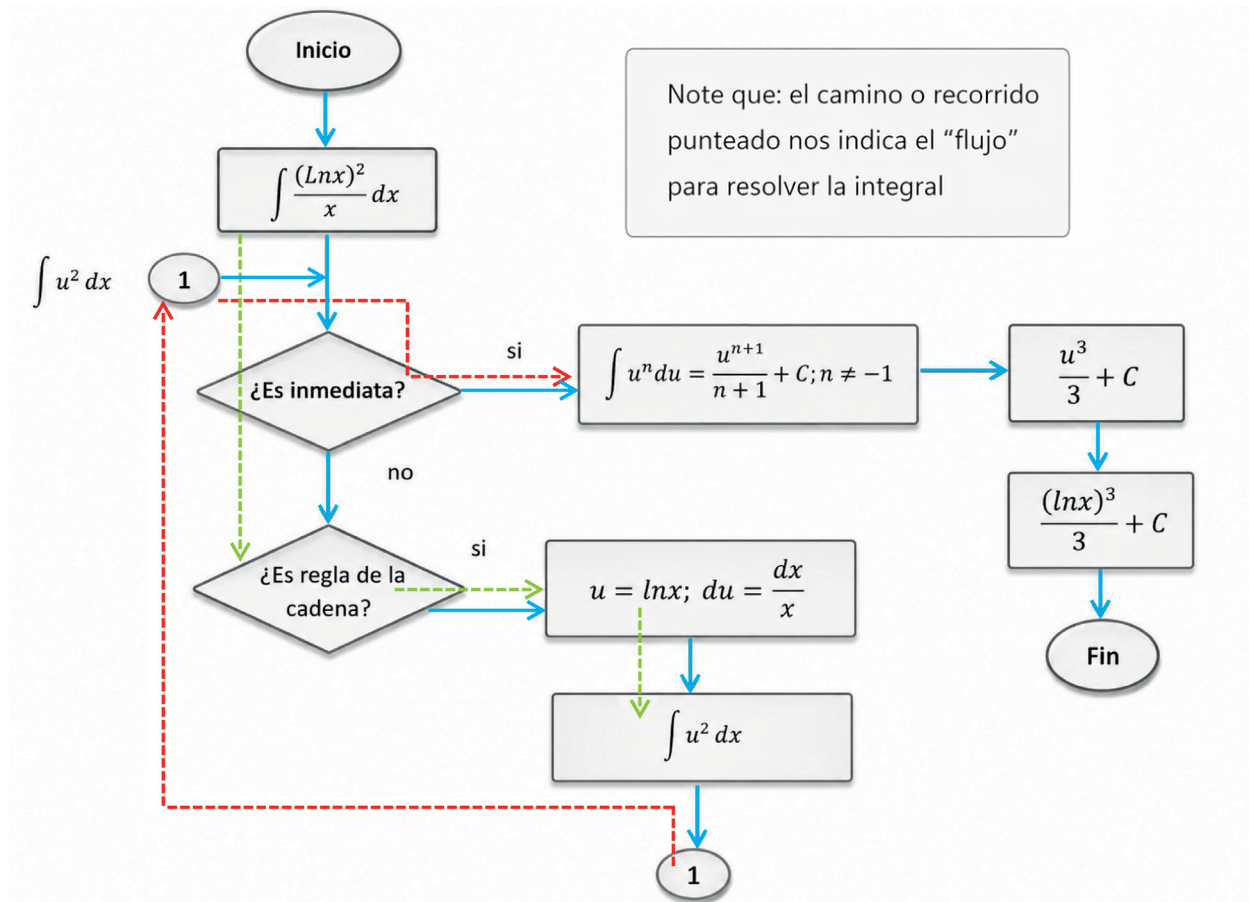
### 2.3.- Integrales inmediatas

Otra forma de presentar las integrales inmediatas es como un integrando bajo el signo del diferencial; esto es,  $\int f(g(x)) g'(x) dx$ . Observa que, para resolver estas integrales, es necesario que puedas visualizar a  $g'(x)$  esto no siempre es fácil. Para ello, debes llamar adecuadamente a una variable auxiliar, digamos  $u$ , como  $g(x)$  que te permita encontrar a  $g'(x)$ ; debes recordar que ya está contenido en el integrando. Es decir, la integral se puede reescribir como  $\int f(u) du$ ;  $u = g(x)$ . Por ejemplo, intentemos resolver a  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$  procedemos como sigue:

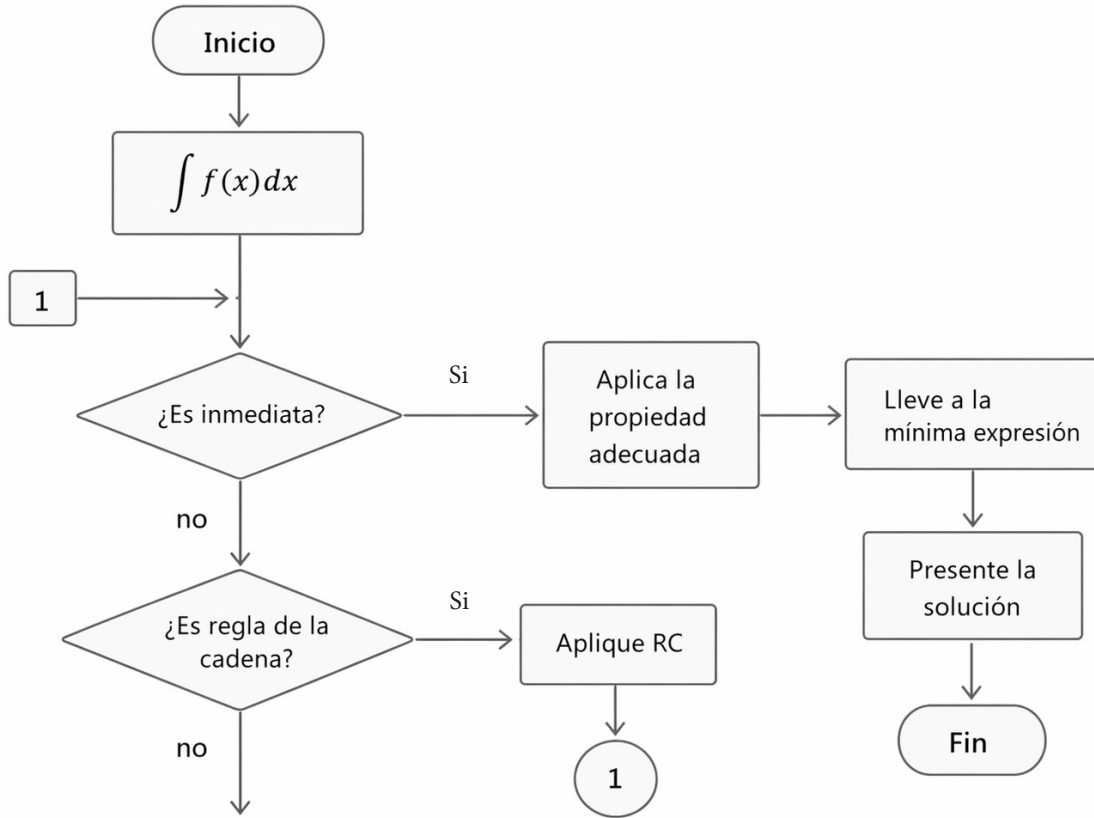
$$I = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx; \text{ si llamamos } u = \ln x, \text{ entonces } du = \frac{dx}{x}; \text{ así}$$

$$I = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C; \text{ devolviendo el cambio } I = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

También podemos verlo por medio del algoritmo siguiente:



Nuestro algoritmo va quedando así:



Aplíquelo a los siguientes ejercicios

- Para cada ejercicio, haga el diagrama de flujo y destaque el camino punteado.
- Indique la regla o propiedad que estás utilizando.
- Escriba en rojo el "paso" donde obtuvo más errores o dificultades.

---

**Ejemplo 2.3.1.**  $I = \int \frac{dx}{\text{sen}(ax + b)}$

---

$$I = \int \frac{dx}{\text{sen}(ax + b)}; u = ax + b \rightarrow du = a dx$$

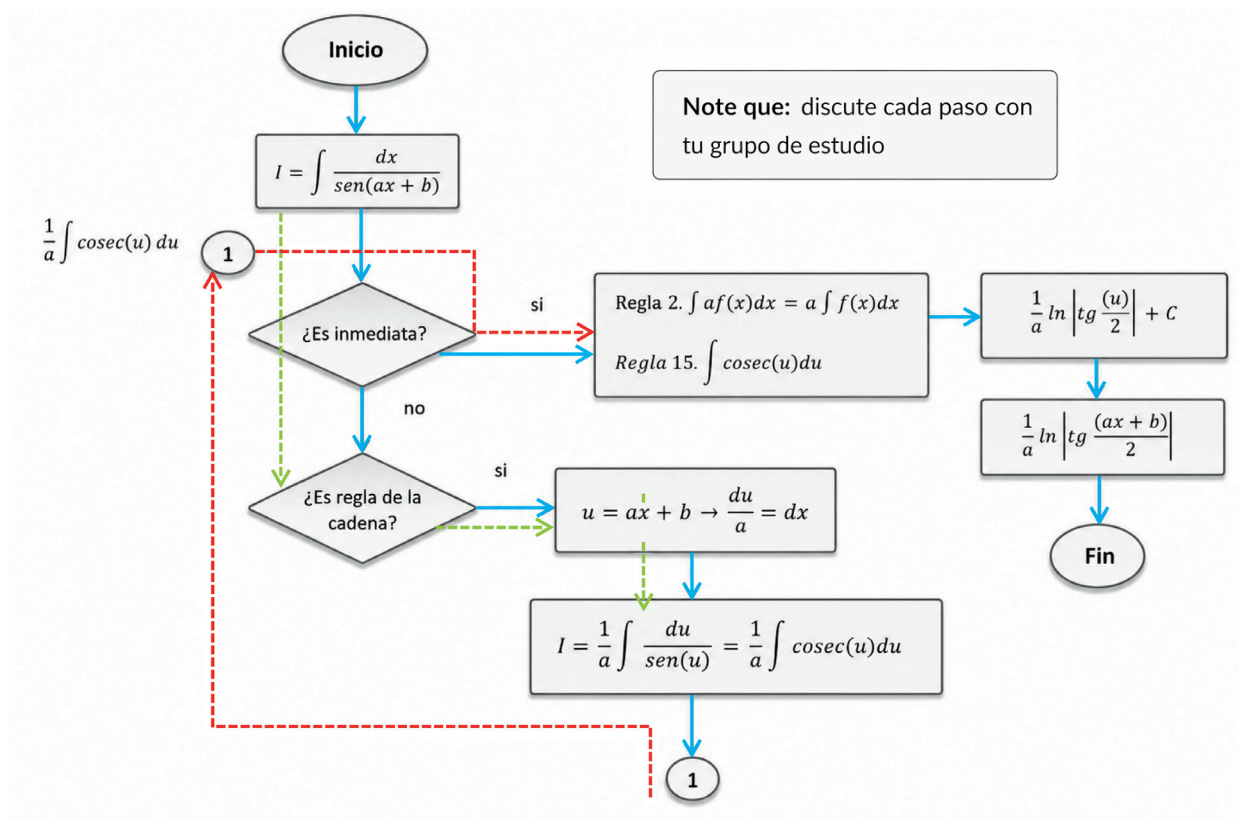
$$I = \frac{1}{a} \int \frac{a dx}{\text{sen}(ax + b)} = \frac{1}{a} \ln \left| \text{tg} \frac{(ax + b)}{2} \right| + C$$

---


$$\therefore I = \int \frac{dx}{\text{sen}(ax + b)} = \frac{1}{a} \ln \left| \text{tg} \frac{(ax + b)}{2} \right| + C \blacksquare$$


---

Para el ejercicio anterior el diagrama queda como:



---

**Ejemplo 2.3.2..**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$

---

Cambio;  $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ;  $du = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) dx$

$$du = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

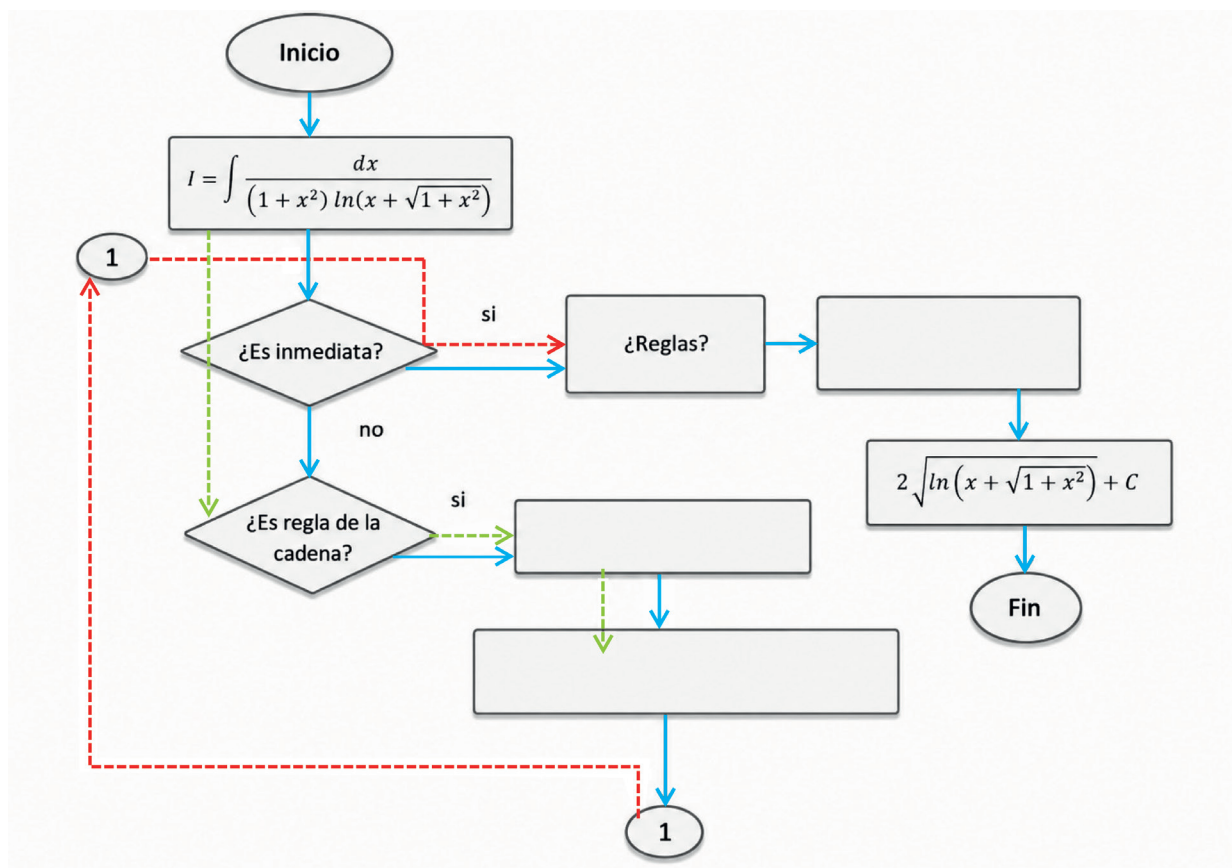
$$du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))^{-1/2} dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$I = \int (u)^{-1/2} du = 2u^{1/2} + C;$$

$$\therefore I = 2 \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} + C \blacksquare$$

Complete el diagrama de flujo, escriba sus reflexiones de cómo se encontró la solución:



---

**Ejemplo 2.3.3.**  $R = \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$

---

$$R = \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = \int x^{1/2} x^{-1} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$R = \int x^{-1/2} dx + \int \ln x \left( \frac{dx}{x} \right) = 2x^{1/2} + \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

---


$$\therefore R = 2\sqrt{x} + \frac{(\ln x)^2}{2} + C \blacksquare$$


---

Observa que en el problema resuelto 9 hubo una descomposición de las integrales en dos. Una de ellas resultó ser inmediata y en la otra se aplicó la regla de la cadena. Precisa en cuál se usó la regla de la cadena y escribe el diagrama de flujo correspondiente para ella.

---

**Ejemplo 2.3.4.**  $R = \int \frac{x^3}{x^8 + 5} dx$

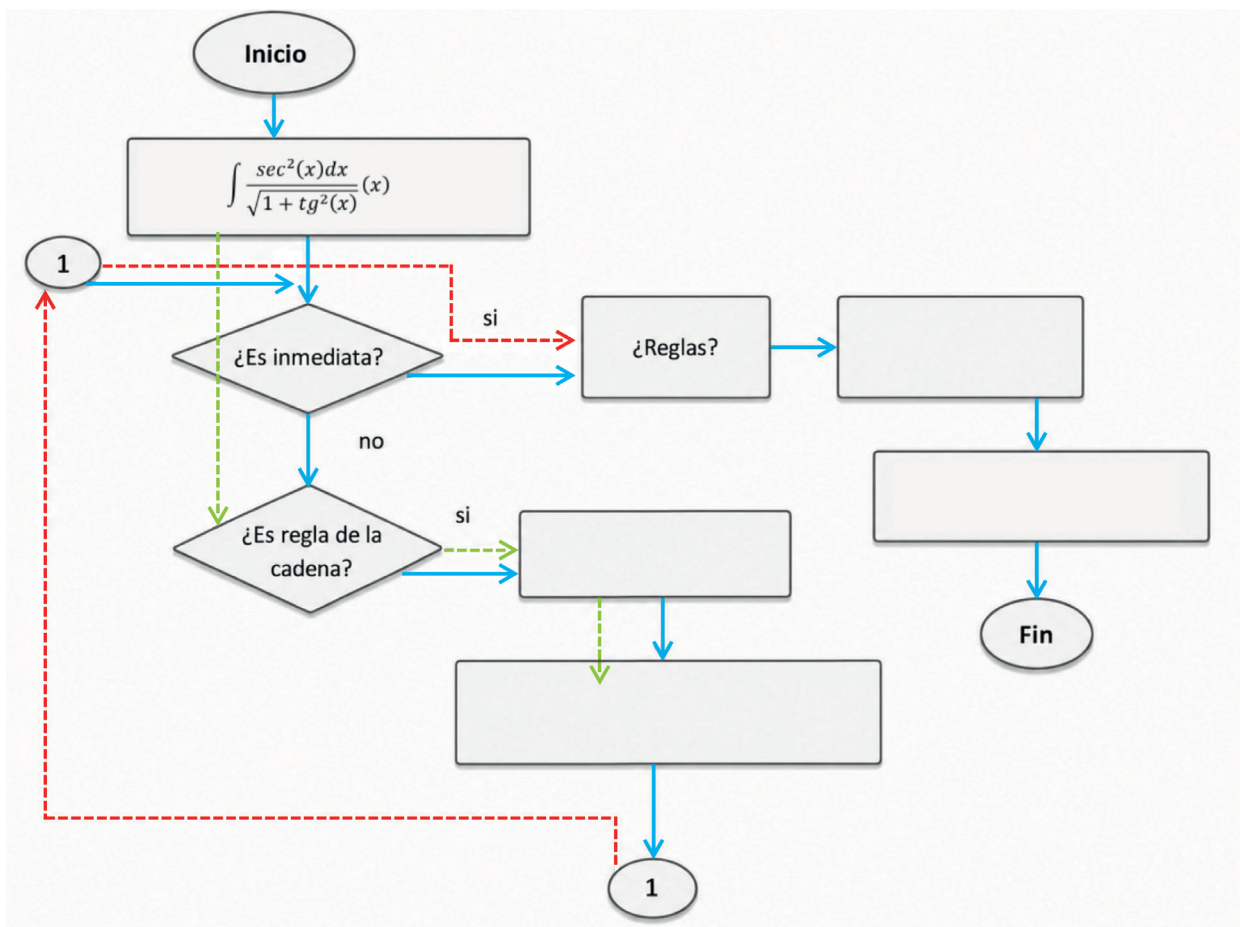
---

$$R = \int \frac{x^3}{x^8 + 5} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2 + (\sqrt{5})^2} dx = ; \text{cambio } t = x^4 \rightarrow dt = 4x^3 dx \rightarrow \frac{dt}{4} = x^3 dx$$

$$\text{Sustituyendo; } R = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(t)^2 + (\sqrt{5})^2} dt = \frac{1}{4\sqrt{5}} \arctg\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$\text{Devolviendo el cambio; } \therefore R = \frac{1}{4\sqrt{5}} \arctg\left(\frac{x^4}{\sqrt{5}}\right) + C \blacksquare$$


---



En el siguiente ejemplo, justifique cada uno de los pasos que se usaron para resolver la integral.

**Ejemplo 2.3.5.**  $I = \int \frac{\left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} dx$

Comenta:

1) ¿Cuál fue el paso 1?

$$I = \int \frac{\left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} - 2 \int dx + \int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$$

$$I = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} - 2x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\therefore I = \sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \right| - 2x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \blacksquare$$

2) Si miras en cada subintegral tienes una constante de integración:  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . Al sumarlas, se forma la constante  $C = C_1 + C_2 + C_3$ . Escribe en la resolución anterior dónde va cada constante.

3) Comente algo muy importante: ¿Por qué en la siguiente expresión se usa el módulo de la tangente?

$$\ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \right|$$

**Ejemplo 2.3.6.**  $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Llamemos

$$t = \sqrt{1-x^2} \rightarrow dt = \frac{-2x dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luego,  $-dt = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Así tenemos que:

$$I = -\int dt = -t + C$$

$$\therefore I = -\sqrt{1-x^2} + C \blacksquare$$

---

**Ejemplo 2.3.7.**  $I = \int \frac{\sec^2(x)dx}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}; u = \tan(x)$

---

$$I = \int \frac{\sec^2(x)dx}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}; \text{Cambio } u = \tan(x) \rightarrow du = \sec^2(x)dx$$

Sustituyendo;  $I$

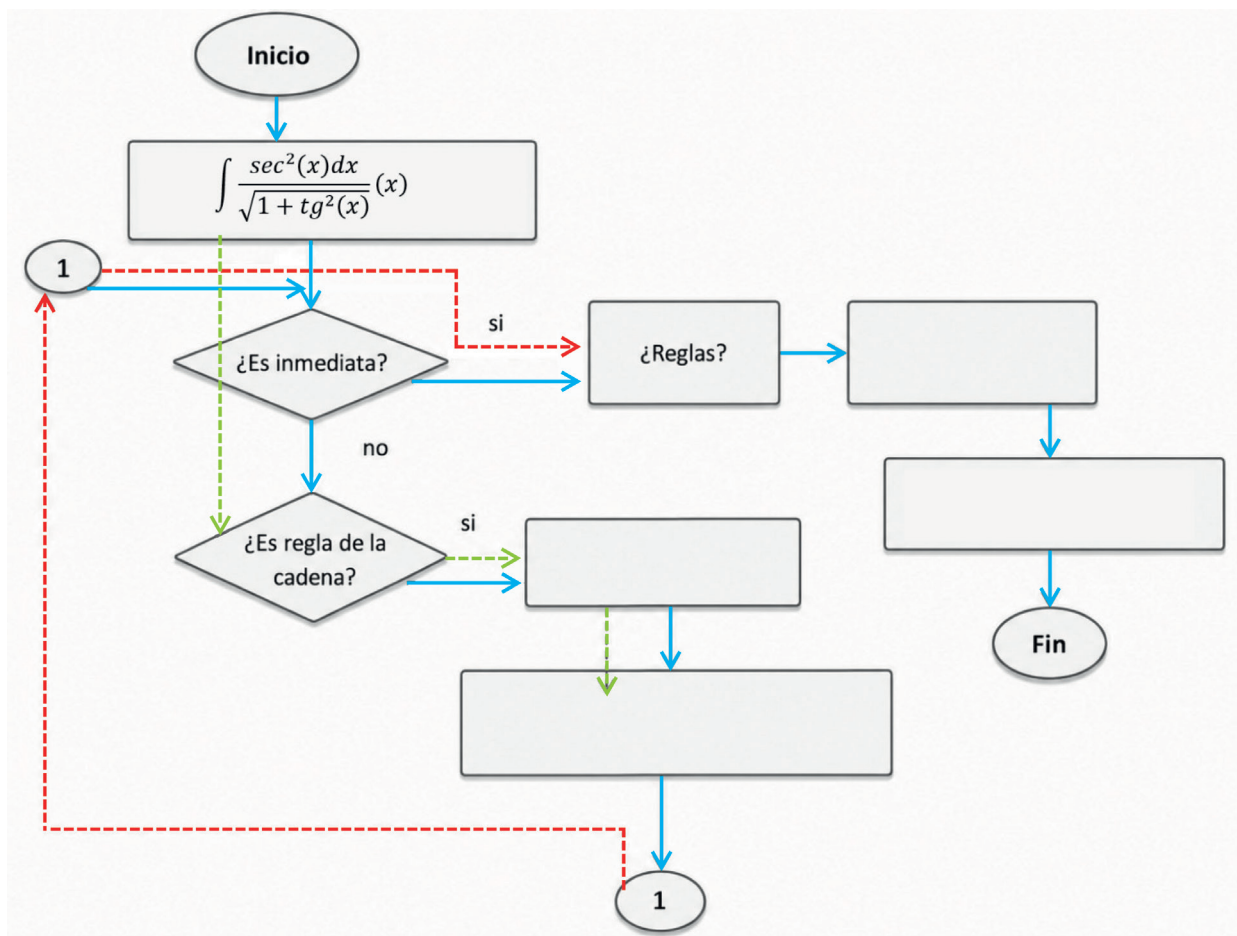
$$= \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}; \text{ usando la regla 25, } I = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$$

---

Devolviendo el cambio;  $\therefore I = \ln(\tan(x) + \sqrt{[\tan(x)]^2 + a^2}) + C$  ■

---

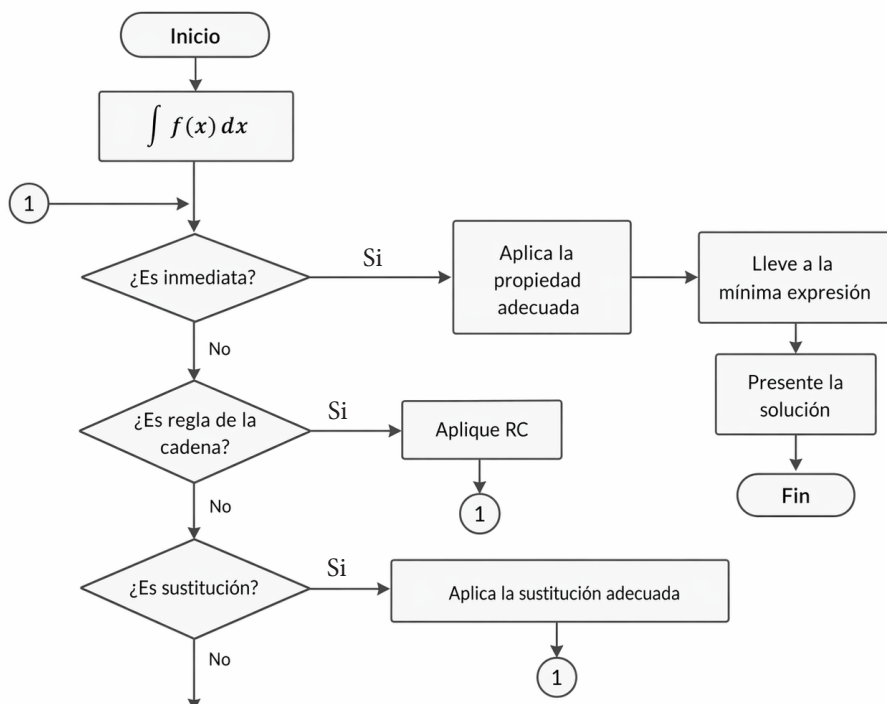
Complete el diagrama de flujo, escriba sus reflexiones de cómo se encontró la solución.



# INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN

## 3.1. Método de sustitución

Algunas integrales pueden resolverse aplicando una sustitución. Si partimos de la integral  $\int f(t) dt$ , en algunos casos existe una función  $g(x)$  tal que  $t = g(x)$ , de manera que,  $dt = g'(x)dx$ . Así, podemos llevar la integral original a la forma:  $\int f(g(x)) g'(x) dx$ . Es decir, nos referimos a una integral bajo el signo del diferencial, o lo que algunos autores llaman la regla de la cadena para la integración. Nuevamente, quiero expresar que debes tener en cuenta tu conocimiento básico de matemáticas, además de una buena visualización y creatividad. Esto únicamente se logra con la práctica. Un dato importante es que suele ser apropiado intentar con las funciones inversas de la función del integrando. Observa cómo continúa nuestro algoritmo



Si te das cuenta, en el algoritmo anterior, cuando falla la regla de la cadena, intentamos con una sustitución de la variable de integración. Te presento algunos ejemplos.

---

**Ejemplo 3.1.1.**  $I = \int t(2t + 5)^{10} dt$ 

---

Recuerda que, en principio, llamamos a nuestra integral como  $\int f(t) dt$ . Hagamos una resolución por pasos:

**Paso 1:** Busquemos una función  $g(t)$  adecuada para hacer la sustitución. En nuestro caso podría ser  $g(t) = 2t + 5$ .

**Paso 2:** Usemos una nueva variable para hacer la integración; por ejemplo, digamos que  $x = g(t) = 2t + 5$

**Paso 3:** Despejemos  $t$  de la expresión del paso 2:  
 $x = 2t + 5$

**Paso 4:** Busquemos la diferencial de nuestra variable de integración:

**Paso 5:** Realicemos la sustitución completa de nuestra integral e integremos:  $dt = \frac{dx}{2}$ .

$$I = \int t(2t + 5)^{10} dt = \int \frac{x - 5}{2} x^{10} \frac{dx}{2} = \frac{1}{4} \int (x^{11} - 5x^{10}) dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{x^{12}}{12} - \frac{5x^{11}}{11} \right] + C$$

**Paso 6:** Devuelve la sustitución.

---

*Devolviendo la sustitución;*  $I = \frac{1}{4} \left[ \frac{(2x + 5)^{12}}{12} - \frac{5(2x + 5)^{11}}{11} \right] + C$  ■

---

Recuerda que en un problema podemos utilizar cualquier letra para nuestra variable de integración y no debemos confundirnos. Conseguir la función adecuada para aplicar este método no siempre resulta fácil, pero si tienes una idea de la inversa de una función eso podría ayudarte.

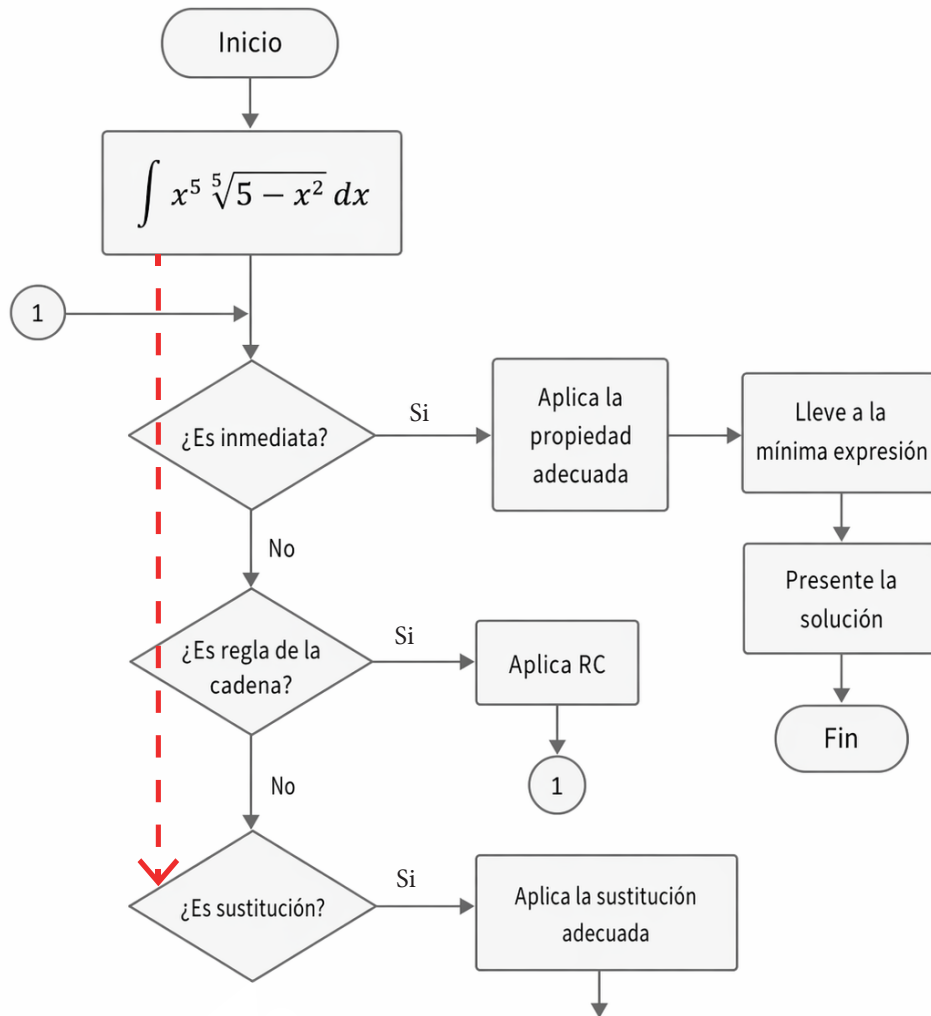
Veamos otro ejemplo.

---

**Ejemplo 3.1.2.**  $R = \int x^5 \sqrt{5 - x^2} dx$ 

---

En algunas integrales debes alterar los pasos anteriores. Presta atención al siguiente ejercicio. Mira la línea roja punteada: si queremos aplicar el algoritmo, observamos que la integral no es inmediata, ni se puede aplicar la regla de la cadena de forma directa. Primero tenemos que usar nuestros conocimientos previos y un cambio de variable apropiado.



Vamos a llamar a la cantidad subradical  $u = 5 - x^2$ , con la idea de poder llevar al integrando a potencias más sencillas, y así, resolver más fácilmente la integral. Observa que vamos a proceder distinto al ejemplo 3.1.1, aquí recurrimos a disociar una potencia para hacer una mejor sustitución.

Justifica los pasos de la integral anterior y coloca a un lado las reglas de integración que has aplicado.

$$R = \int x^5 \sqrt[5]{5-x^2} dx; \text{ sustitución } u = 5 - x^2 \rightarrow du = -2x dx; \text{ además } x^2 = 5 - u \rightarrow x = \sqrt{5-u}$$

$$\text{Como } R = -\frac{1}{2} \int x^4 \sqrt[5]{5-x^2} (-2x dx) = -\frac{1}{2} \int (\sqrt{5-u})^4 \sqrt[5]{u} (du) = -\frac{1}{2} \int (5-u)^2 \sqrt[5]{u} du$$

$$R = -\frac{1}{2} \int (25 - 10u + u^2) u^{\frac{1}{5}} du = -\frac{1}{2} \left[ \int (25u^{\frac{1}{5}} - 10u^{\frac{6}{5}} + u^{\frac{11}{5}}) du \right]$$

$$R = -\frac{1}{2} \left[ 25 \int u^{\frac{1}{5}} du - 10 \int u^{\frac{6}{5}} du + \int u^{\frac{11}{5}} du \right] = -\frac{1}{2} \left[ \frac{5}{6} 25u^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{11} 10u^{\frac{11}{5}} + \frac{5}{16} u^{\frac{16}{5}} \right] + C$$

$$R = -\frac{5}{2} u^{\frac{6}{5}} \left[ \frac{1}{6} 25 - \frac{1}{11} 10u + \frac{1}{16} u^2 \right] + C$$

$$\text{Devolviendo el cambio, } R = -\frac{5}{2} (5 - x^2)^{\frac{6}{5}} \left[ \frac{25}{6} - \frac{10}{11} (5 - x^2) + \frac{(5 - x^2)^2}{16} \right] + C \blacksquare$$

En el ejemplo 3.1.3, continuamos con el método de sustitución. Observa detalladamente cada paso:

**Ejemplo 3.1.3.**  $R = \int x\sqrt{x-1} dx$

$$R = \int x\sqrt{x-1} dx; \text{ sustitución } u = \sqrt{x-1} \rightarrow x = u^2 + 1 \rightarrow dx = 2u du$$

$$\text{Sustituyendo; } R = \int (u^2 + 1)u \cdot 2u du = 2 \int (u^4 + u^2) du = 2 \left[ \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right] + C$$

$$\text{Devolviendo la sustitución; } \therefore R = 2 \left[ \frac{(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{(\sqrt{x-1})^3}{3} \right] + C \blacksquare$$

**Ejemplos 3.1.4.** Halla las siguientes integrales utilizando para ello las sustituciones indicadas (Demidovich, 1969):

a)  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}; x = \frac{1}{t}$

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}; x = \frac{1}{t} \rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 2}} = - \int \frac{t dt}{t^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 2}} = - \int \frac{t dt}{\sqrt{1 - 2t^2}} =$$

$$I = - \int \frac{dt}{\sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + C$$

---

$$\therefore I = -\frac{\sqrt{2}}{2} \arccos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) + C \quad \blacksquare$$

---

---

$$b) R = \int \frac{dx}{e^x + 1}; x = -\ln t$$

---

$$R = \int \frac{dx}{e^x + 1}; x = -\ln t \rightarrow dx = -\frac{dt}{t}$$

$$\text{Sustituyendo } R = \int \frac{-\frac{dt}{t}}{e^{-\ln t} + 1} = -\int \frac{dt}{t\left(\frac{1}{t} + 1\right)} = -\int \frac{dt}{t+1} = -\ln|1+t| + C$$

---

$$\text{Devolviendo la sustitución; } \therefore R = -\ln|1 + e^{-x}| + C \quad \blacksquare$$

---

---

$$c) I = \int x(3x^2 + 4)^5 dx; 3x^2 + 4 = t$$

---

$$I = \int x(3x^2 + 4)^5 dx; 3x^2 + 4 = t \rightarrow 6x dx = dt \rightarrow x dx = \frac{dt}{6}$$

$$\text{Sustituyendo; } I = \int (t)^5 \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \frac{t^6}{6} + C$$

---

$$\text{Devolviendo la sustitución; } \therefore I = \frac{(3x^2 + 4)^6}{36} + C \quad \blacksquare$$

---

---

$$d) R = \int \frac{3x}{\sqrt{3x+1}} dx; z = \sqrt{3x+1}$$

---

$$R = \int \frac{3x}{\sqrt{3x+1}} dx; z = \sqrt{3x+1} \rightarrow x = \frac{z^2-1}{3} \rightarrow dx = \frac{2z dz}{3}$$

$$\text{Sustituyendo en } R = \int \frac{3 \frac{z^2-1}{3}}{z} \frac{2z dz}{3} = \frac{2}{3} \int z^2 - 1 dz = \frac{2}{3} \left[ \frac{z^3}{3} - z \right] + C$$

---

$$\text{Devolviendo la sustitución; } \therefore R = \frac{2}{3} \left[ \frac{(\sqrt{3x+1})^3}{3} - \sqrt{3x+1} \right] + C \quad \blacksquare$$

---

### 3.2. Integrando que contiene funciones cuadráticas

En esta sección veremos cómo tratar con integrales que contienen un trinomio de segundo grado que no puede descomponerse en factores lineales. Para la resolución de integrales de este tipo, procedemos primero completando cuadrados y, posteriormente, realizamos una sustitución en la función lineal (o monomio) que está involucrada en el proceso de completar cuadrados.

También tomaremos en cuenta las partes de un cociente o división:

$$\begin{array}{r|l} \textit{Dividendo}=D & \textit{Divisor}=d \\ \hline \textit{Resto}=R & \textit{Cociente}=C \end{array}$$

Sabemos que:  $D = C \cdot d + R \Rightarrow \frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$

Observa el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo 3.2.1.**  $I = \int \frac{2x^3 dx}{2x^2 - 4x + 3}$

---

Tomemos la fracción del integrando:  $\frac{2x^3}{2x^2 - 4x + 3}$

Realizando la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & 2x^2 - 4x + 3 \\ \hline -2x^3 + 4x^2 - 3x & x + 2 \\ 0 + 4x^2 - 3x & \\ -4x^2 + 8x - 6 & \\ \hline & 5x - 6 \end{array}$$

Identificamos que:

$D = 2x^3, d = 2x^2 - 4x + 3, R = 5x - 6, C = x + 2$

Así:  $\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d} \Rightarrow \frac{2x^3}{2x^2 - 4x + 3} = (x + 2) + \frac{5x - 6}{2x^2 - 4x + 3}$

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{2x^3 dx}{2x^2 - 4x + 3} = \int (x + 2) dx + \int \frac{5x - 6}{2x^2 - 4x + 3} dx$$

Completando cuadrados:

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 3 = 2(x - 1) + 1$$

Efectuando el cambio:  $y = (x - 1) \rightarrow dy = dx; x = (y + 1)$

Integrando y sustituyendo en I:

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{5(y + 1) - 6}{2y^2 + 1} dy = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{5y - 1}{2y^2 + 1} dy$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{5y - 1}{2y^2 + 1} dy = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{4} \int \frac{4y}{2y^2 + 1} dy - \int \frac{1}{2y^2 + 1} dy$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{4} \int \frac{4y}{2y^2 + 1} dy - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dy$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{4} \ln|2y^2 + 1| - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \right) + C$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{4} \ln|2y^2 + 1| - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}y) + C$$

---

Devolviendo el cambio

$$\therefore I = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{4} \ln|2(x - 1)^2 + 1| - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}(x - 1)) + C \blacksquare$$

---

También debemos observar que algunas integrales con expresiones cuadráticas solo necesitan completamiento de cuadrados y hacer la sustitución en el monomio resultante, tal como lo verás a continuación:

---

**Ejemplo 3.2.2.**  $R = \int \frac{(2x - 3)}{x^2 + 2x + 2} dx$

---

$$R = \int \frac{(2x - 3)}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{2y - 2 - 3}{y^2 + 1} dy$$

$$R = \int \frac{2y}{y^2 + 1} dy - \int \frac{5}{y^2 + 1} dy$$

$$R = \ln|y^2 + 1| - \arctg(y) + C$$

*Completando Cuadrado*

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

*Cambio de Variable*

Sea  $y = x + 1 \rightarrow x = y - 1 \rightarrow dx = dy$

---

$$\therefore R = \ln|x^2 + 2x + 2| - \arctg(x + 1) + C \blacksquare$$

---

---

**Ejemplo 3.2.3.**  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

---

*Escribiendo convenientemente:*  $2x - x^2 = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x - 1)^2 + 1$

*Hacemos el cambio*  $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \rightarrow dy = dx$

*Sustituyendo en I:*  $I = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsen(y) + C$

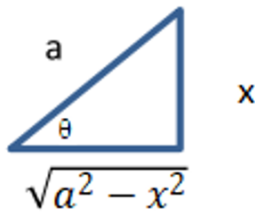
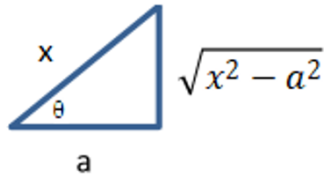
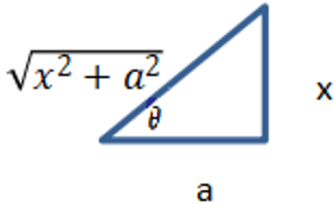
---

$$\therefore I = \arcsen(x - 1) + C \blacksquare$$

---

### 3.3. Sustitución trigonométrica

Hay integrales que contienen radicales como  $\sqrt{(a^2-x^2)}$ ,  $\sqrt{(x^2-a^2)}$ ,  $\sqrt{(x^2+a^2)}$ . En estos casos, podemos proceder realizando sustituciones trigonométricas como sigue (Phillips, 2022; Piskunov, 2009; Protter & Morrey, 2001)

Expresión	Sustitución	Cambio de radical	Triángulo asociado
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$	
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \tan \theta$	$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$	

Para ilustrar este cambio de variable o sustitución, presentaremos una demostración muy útil.

Demostramos que:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - \ln \left| \frac{(a + \sqrt{a^2 - u^2})}{u} \right| + C$$

En efecto:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du$$

Procederemos haciendo el cambio  $u = a \operatorname{sen} \theta$ ,

$du = a \operatorname{cos} \theta d\theta$ ,  $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a \operatorname{cos} \theta$ . Sustituyendo los cambios en la integral, nos queda:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \int \frac{a \operatorname{cos} \theta}{a \operatorname{sen} \theta} a \operatorname{cos} \theta d\theta = a \int \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} d\theta = a \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = a \int (\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{sen} \theta) d\theta = a \int \operatorname{cosec} \theta d\theta - a \int \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = a \ln |\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{cot} \theta| + a \operatorname{cos} \theta + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = a \ln \left| \frac{a}{u} - \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + a \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + \sqrt{a^2 - u^2} + C \quad (1)$$

Observe que aún no hemos llegado a la expresión que queremos demostrar. Para llegar a ella debemos hacer algunas operaciones matemáticas y tomar una propiedad de logaritmos.

Con el siguiente ejemplo vamos a introducirnos en un nuevo cambio de variables que

Racionalizando:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - u^2}}{u} = \frac{(a - \sqrt{a^2 - u^2})(a + \sqrt{a^2 - u^2})}{u(a + \sqrt{a^2 - u^2})} = \frac{a^2 - a^2 + u^2}{u(a + \sqrt{a^2 - u^2})}$$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - u^2}}{u} = \frac{u^2}{u(a + \sqrt{a^2 - u^2})} = \frac{u}{(a + \sqrt{a^2 - u^2})}$$

De lo anterior podemos decir que:

$$\ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| = \ln \left| \frac{u}{(a + \sqrt{a^2 - u^2})} \right|$$

Usando la propiedad de los logaritmos  $\log_a \frac{x}{y} = -\log_a \frac{y}{x}$ :

$$\ln \left| \frac{u}{(a + \sqrt{a^2 - u^2})} \right| = -\ln \left| \frac{(a + \sqrt{a^2 - u^2})}{u} \right|$$

Sustituyendo en (1) la expresión anterior y conmutando:

$$\therefore \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - \ln \left| \frac{(a + \sqrt{a^2 - u^2})}{u} \right| + C \blacksquare$$

Esto precisamente es lo que queríamos demostrar

Con el siguiente ejemplo vamos a introducirnos en un nuevo cambio de variables que veremos en el próximo capítulo:

---

**Ejemplo 3.3.1.**  $R = \int \sqrt{x^2 + 4} dx$

---

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx \quad \text{Procederemos haciendo el cambio } x = 2 \tan \theta, \quad dx = 2 \sec^2 \theta d\theta, \\ \sqrt{(2^2 - x^2)} = 2 \sec \theta. \text{ Sustituyendo los cambios en la integral, nos queda:}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = \int 2 \sec \theta \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta = 4 \int \sec^3 \theta d\theta$$

La  $\int \sec^3 \theta d\theta$  se resuelve usando el famoso método de sustitución llamado integración por partes. Dejaremos su resolución para el próximo capítulo. Presentaremos abajo la fórmula correspondiente a su resolución y la demostraremos posteriormente en el siguiente capítulo:

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

Por lo tanto:

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = 4 \int \sec^3 \theta d\theta = 2 \sec \theta \operatorname{tg} \theta + 2 \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = 2(\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|) + C$$

Devolviendo el cambio:

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = 2(\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = 2 \left( \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2 + 4} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 4} + 2 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right| + C \blacksquare$$

### 3.4. Ejercicios propuestos

Halla la integral indicada

1.

$$\int \sqrt{4x-1} dx$$

2.

$$\int \frac{dt}{(5-2t)^2}$$

3.

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2} dx$$

4.

$$\int \frac{8dx}{x^2-6x+25}$$

5.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$$

6.

$$\int a^x e^{3x} dx$$

7.

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{4-\operatorname{Ln}^2 z}}$$

8.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$$

9.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

# INTEGRACIÓN POR PARTES (IPP)

Dentro de los métodos de integración, los métodos de sustitución son una de las herramientas más usadas y prácticas para resolver una integral. La integración por partes es un método de sustitución que permite trabajar con funciones de gran complejidad y productos de funciones elementales como inversas trigonométricas, logarítmicas, aritméticas, trigonométricas y exponenciales. Estas funciones se explican mejor en Piskunov (2009). Te muestro a continuación un poco sobre estas funciones elementales, a manera de recuerdo:

## 4.1. Funciones algebraicas

Son funciones algebraicas las siguientes funciones elementales:

1. La función racional entera o polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Donde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  son constantes que llamamos coeficientes;  $n$  es un entero no negativo llamado grado del polinomio. La función está definida para todos los valores de  $x$ , es decir, en un intervalo infinito.

2. La función racional fraccionaria:

Esta función se expresa como cociente de dos polinomios.

$$Q(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

3. La función irracional:

Si en el segundo miembro de la igualdad  $y = f(x)$  se efectúan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación de potencias, y siendo los exponentes números racionales, no enteros, la función  $y$  en función de  $x$  se llama irracional. Ejemplo de una función irracional:

$$Ir(x) = \frac{(2x + 1)\sqrt{4x^3 + 1}}{\sqrt{x} + 3x + 2}$$

En general, a las funciones algebraicas las podemos denotar con la letra  $A(x)$ .

## 4.2. Funciones exponenciales:

Una función exponencial es una función real de la forma:

$$E(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

Está definida para todos los valores de  $x$ .

## 4.3. Funciones logarítmicas:

Una función exponencial es una función real de la forma:

$$L(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

Está definida para todos los valores de  $x$ .

#### 4.4. Funciones trigonométricas:

$$T(x) = \text{sen } x \quad T(x) = \text{cos } x \quad T(x) = \text{tg } x$$

$$T(x) = \text{cotg } x \quad T(x) = \text{sec } x \quad T(x) = \text{cosec } x$$

Funciones trigonométricas inversas:

$$I(x) = \text{arcsen } x \quad I(x) = \text{arccos } x \quad I(x) = \text{arctg } x$$

$$I(x) = \text{arccotg } x \quad I(x) = \text{arcsec } x \quad I(x) = \text{arccosec } x$$

#### 4.5. Fórmula de la integración por partes:

Para encontrar la fórmula de la integración por partes, primero analicemos la fórmula de la diferencial de un producto. Digamos que  $u = u(x)$  y  $v = v(x)$  son dos funciones elementales como las vistas anteriormente, entonces sabemos que:

$$d(uv) = vdu + udv \quad (4.1)$$

Si integramos la ecuación (4.1) obtenemos:

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv \quad (4.2)$$

Despejando  $\int udv$  de (4.2)

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (4.3)$$

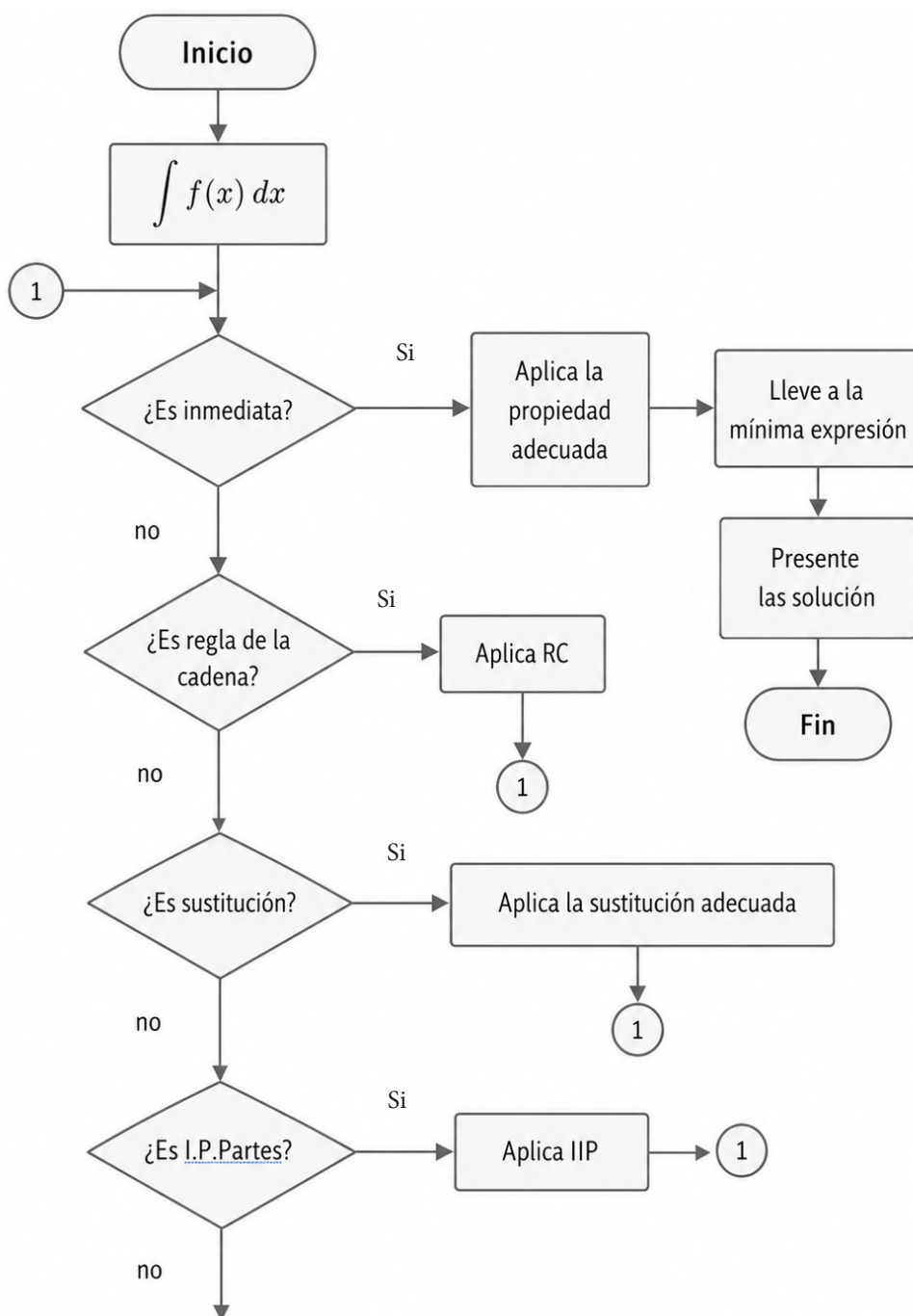
La fórmula que hemos encontrado en (4.3) es la expresión de la integral por partes. La utilidad de esta técnica es que nos permite resolver la integral  $\int udv$  por otra más “fácil” de integrar:  $\int vdu$ . Las integrales que pueden ser resueltas por estas técnicas son de una gran variedad. Por ejemplo, todas las integrales inversas trigonométricas y los logaritmos se resuelven por esta técnica; así como también los productos:

Producto de funciones	Notación
(Aritméticas) (Inversas trigonométricas)	$A(x)I(x)$
(Exponenciales) (Aritméticas)	$E(x)A(x)$
(Logarítmicas) (Trigonométricas)	$L(x)T(x)$
(Inversas trigonométricas) (Exponenciales)	$I(x)E(x)$

(Logarítmicas)(Aritméticas)	$L(x)A(x)$
(Aritméticas)(Exponenciales)	$A(x)E(x)$

Para resolver cualquier integral, el algoritmo va quedando como:

### INTEGRACIÓN POR PARTES (IIP)



Recordemos que este algoritmo nos permite diagnosticar qué técnica vamos a utilizar. Ya sabemos qué cosas debemos tener en cuenta para precisar cuándo usamos una integración por partes. Ahora veamos cómo usar la fórmula (4.3). La idea principal es que partimos de la  $\int u dv$  de aquí debemos llamar adecuadamente en la integral por resolver a  $u$  y  $dv$ . Decidir quién será elegido como tal es la cuestión fundamental para el uso de esta técnica.

Veamos los siguientes ejemplos:

Resolver:

---

**Ejemplo 4.6.1.**  $I = \int x \operatorname{sen} x dx$

---

$$I = \int x \operatorname{sen} x dx ; \text{ si } u = x \Rightarrow du = dx ; dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\operatorname{cos} x$$

$$I = \int x \operatorname{sen} x dx = \int u dv = -x \operatorname{cos} x + \int \operatorname{cos} x dx$$

---


$$\therefore I = -x \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x + C \quad \blacksquare$$


---

El integrando del ejemplo (4.1) es un producto entre una función aritmética ( $x$ ) y una función trigonométrica ( $\operatorname{sen} x$ ). En esta integral debemos usar la regla del menor esfuerzo; es decir, decidir entre la función más fácil de integrar y otra más fácil de derivar, las cuales deben ser identificadas. Observa que en ejemplo hemos llamado  $u = x$ , una función aritmética; mientras que a  $dv = \operatorname{sen} x dx$ , una función trigonométrica. Esto nos lleva a una integral inmediata y fácil de integrar:  $\int v du = -\int \operatorname{cos} x dx$ . Lo anterior cumple con el principio de convertir la integral original en un producto de funciones ( $-x \operatorname{cos} x$ ) y una integral más sencilla ( $\int v du = -\int \operatorname{cos} x dx$ ). Si hubiésemos llamado  $u = \operatorname{sen} x$  y a  $dv = x dx$  entonces  $\int v du = \int \frac{x^2}{2} \operatorname{cos} x dx$ , que sería una integral realmente más compleja.

Una forma de usar la integral por partes aplicando la regla del menor esfuerzo consiste en un sistema que no tiene un asidero académico o soporte literario, pero que resulta muy eficiente en la mayoría de los ejercicios. Esta es la llamada regla ILATE (inversa trigonométrica, logarítmica, aritmética, trigonométrica, exponencial) (Asvi & Ignu, 2020; Ayres, 2008; Demidovich, 1969) también conocida como regla LIATE (logarítmica, inversa trigonométrica, aritmética, trigonométrica, exponencial). La idea es priorizar la escogencia de  $u$  frente a la de  $dv$ . La diferencial de  $u$  se escoge con la letra de la palabra ILATE que coincida primero del producto de las funciones; en el ejemplo (4.1) el producto está definido como  $A(x) T(x)$ . Observa que la función aritmética es la primera función en aparecer según ILATE y luego la trigonométrica, así escogeremos  $u = x$  y  $dv = \operatorname{sen} x dx$ .

Veamos el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo 4.6.2.**  $R = \int x^3 e^{x^2} dx$

---

Según la regla ILATE, en el integrando tenemos el producto  $A(x)E(x)$ , en este caso tomaremos:

$$u = x^2 \text{ y } dv = xe^{x^2} dx$$

Observa que para aplicar la integración por partes hemos disociado la potencia  $x^3$  como  $x^3 = x^2 \cdot x$ . Esto se debe a que no podríamos integrar a  $v = \int e^{x^2} dx$ , ya que esta función no tiene una antiderivada simple en términos de funciones elementales, pero puede ser evaluada numéricamente o aproximada usando métodos numéricos. Esto escapa del alcance de este libro y no cumple con la regla de menor esfuerzo. Sin embargo, al disociar la potencia impar podemos usar la regla de la cadena para  $v = \int xe^{x^2} dx$ , que es una integral más sencilla. Luego, la integral la podemos resolver como:

$$\begin{aligned} R &= \int x^3 e^{x^2} dx \rightarrow \int u dv; \text{ donde } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx; dv = xe^{x^2} dx \Rightarrow v \\ &= \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \end{aligned}$$

Hemos colocado la constante  $C_1$  en la integral de  $v$ , pero esto realmente no se estila, más bien, al final de la resolución completa de la integral se coloca la constante  $C$  de forma general. Así que:  $v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

De manera que aplicando IPP:

$$R = \int x^3 e^{x^2} dx = x^2 \left( \frac{1}{2} e^{x^2} \right) - \int \left( \frac{1}{2} e^{x^2} \right) 2x dx$$

$$R = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int \left( \frac{1}{2} e^{x^2} 2x \right) dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} 2x dx$$

$$R = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

---


$$\therefore R = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C \quad \blacksquare$$


---

Resolvamos ahora la siguiente integral:

---

**Ejemplo 4.6.3.**  $I = \int \operatorname{Ln} x \, dx$ 

---

Anteriormente, hemos dicho que las integrales de los logaritmos las debemos resolver usando integración por partes. Para ello, usaremos  $u = \operatorname{Ln} x$ . Veamos:

$$I = \int \operatorname{Ln} x \, dx; \text{ si } u = \operatorname{Ln} x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; dv = dx \Rightarrow v = x$$
$$\text{Luego, } I = \int \operatorname{Ln} x \, dx = \int u \, dv = x \operatorname{Ln} x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \operatorname{Ln} x - x + C$$

---

$$\therefore I = x(\operatorname{Ln} x - 1) + C \quad \blacksquare$$

---

---

**Ejemplo 4.6.4.**  $R = \int \operatorname{arctg} x \, dx$ 

---

$$R = \int \operatorname{arctg} x \, dx; \text{ si } u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}; dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Luego, } R = \int \operatorname{arctg} x \, dx = \int u \, dv = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}$$

---

$$\therefore I = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|1+x^2| + C \quad \blacksquare$$

---

---

**Ejemplo 4.6.5.**  $R = \int \arcsen x dx$ 

---

$$R = \int \arcsen x dx; \text{ si } u = \arcsen x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Luego, } R = \int \arcsen x dx = \int u dv = x \arcsen x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Recordemos el ejemplo 2.2.6. en el cual probamos que:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Así que:

---

$$\therefore R = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \blacksquare$$

---

Anteriormente, comentamos que la regla ILATE es usada como LIATE, es decir, intercambiando las letras IL. Esto altera la escogencia de  $u$  para el diferencial. Tratemos el siguiente ejercicio y lo vamos a resolver de ambas maneras.

---

**Ejemplo 4.6.6.**  $R = \int \arcsen x \ln x dx$ 

---

Solución:

a) Usaremos, primero, la regla ILATE. Bajo esta regla:

$$u = \arcsen x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; dv = \ln x dx \Rightarrow v = x \ln x - x \text{ (ver ejercicio 4.3)}$$

Aplicando la fórmula (4.3). Luego,

$$R = \arcsen x (x \ln x - x) - \int (x \ln x - x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$R = \arcsen x (x \ln x - x) - \int x \ln x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Observa que la integral:

$$R_1 = \int x \ln x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Debe resolverse mediante el método IPP, un procedimiento común al aplicar esta técnica. Podemos encontrar que debemos aplicar la IPP varias veces o que la integral original se reproduzca, esto lo veremos posteriormente. Ahora veamos cómo resolver usando ILATE

$$R_1 = \int x \ln x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ; u_1 = \ln x, dv_1 = x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Así:

$$du_1 = \frac{dx}{x}; v_1 = \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Al aplicar la fórmula de IPP:

$$R_1 = \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 = -\ln x \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{x}$$

En la sección 3.3 probamos que:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} du = \sqrt{a^2-u^2} - \ln \left| \frac{(a + \sqrt{a^2-u^2})}{u} \right| + C$$

Usemos la identidad anterior para tratar a  $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$ ; y así obtenemos a:

$$\int \frac{\sqrt{1^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{1^2-x^2} - \ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1^2-x^2})}{x} \right|$$

Por ser una integral intermedia no colocamos la constante de integración,  $R_1$  queda como:

$$R_1 = -\operatorname{Lnx} \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - \ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1-x^2})}{x} \right|$$

Sustituyendo en R:

$$R = \operatorname{arcsen} x (x \ln x - x) + \operatorname{Lnx} \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + \ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1-x^2})}{x} \right| + \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$R = \operatorname{arcsen} x (x \ln x - x) + \operatorname{Lnx} \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + \ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1-x^2})}{x} \right| - \sqrt{1-x^2}$$

En conclusión:

---


$$\therefore R = \operatorname{arcsen} x (x \ln x - x) + \operatorname{Lnx} \sqrt{1-x^2} + \ln \left| \frac{(1 + \sqrt{1-x^2})}{x} \right| - 2\sqrt{1-x^2} + C \quad \blacksquare$$


---

**b)** Ahora, resolveremos el mismo ejercicio usando la regla LIATE. No perdamos de vista que debemos usar la expresión:

$$R = \int \operatorname{arcsen} x \operatorname{Lnx} dx = \int u dv = uv - \int v du$$

donde

$$u = \operatorname{Lnx} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; dv = \operatorname{arcsen} x dx \Rightarrow v = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \text{ (ver ejercicio 4.5)}$$

Así la integral nos queda como:

$$R = \int \operatorname{arcsen} x \operatorname{Lnx} dx = \operatorname{Lnx} (x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}) - \int (x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}) \frac{dx}{x}$$

Distribuyendo tenemos que:

$$R = \text{Lnx} \left( x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} \right) - \int x \arcsen x \frac{dx}{x} - \int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{x}$$

Simplifiquemos apropiadamente:

$$R = \text{Lnx} \left( x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} \right) - \int \arcsen x dx - \int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{x}$$

Usemos las identidades que hemos encontrado para:  $\int \arcsen x dx$  y  $\int \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{x}$

$$R = \text{Lnx} \left( x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} \right) - x \arcsen x - \sqrt{1-x^2} - \left( \sqrt{1-x^2} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| \right) + C$$

Multiplicando y agrupando convenientemente, encontramos que:

$$R = \text{Lnx} \left( x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} \right) - x \arcsen x + \text{Ln} \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - 2\sqrt{1-x^2} + C$$

Distribuyamos nuevamente:

$$R = \text{Lnx} x \arcsen x + \text{Lnx} \sqrt{1-x^2} - x \arcsen x + \text{Ln} \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - 2\sqrt{1-x^2} + C$$

Luego, agrupemos los términos semejantes:

$$R = \text{Lnx} x \arcsen x + \text{Lnx} \sqrt{1-x^2} - x \arcsen x + \text{Ln} \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - 2\sqrt{1-x^2} + C$$

Finalmente, apliquemos la propiedad distributiva para encontrar la solución:

---


$$\therefore R = \arcsen x (x \ln x - x) + \text{Lnx} \sqrt{1-x^2} + \text{Ln} \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - 2\sqrt{1-x^2} + C \blacksquare$$


---

Como puede apreciarse, al usar ILATE o LIATE hemos llegado al mismo resultado. El método dependerá del usuario; busca el que necesite menos pasos e integrales más simples.

En el capítulo 3, aseguramos que:

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

Esta integral es un clásico en los libros que tratan el cálculo integral. Este tipo de integrales no pueden resolverse usando ILATE y nos referimos a ellas como una integral de potencia de una función trigonométrica. En este caso, para resolverla buscamos usar la regla que establece que el  $dv$  debe ser la expresión más fácil de la integral. También, observamos que esta integral se reproduce cuando la estamos resolviendo. Esto es típico para algunas integrales. Ahora continuaremos con la resolución de la integral; para ello expresaremos el integrando en un producto de funciones trigonométricas:

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \int \sec \theta \sec^2 \theta d\theta$$

Apliquemos el método de integración por partes:

$$u = \sec \theta \Rightarrow du = \sec \theta \tan \theta d\theta ; dv = \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow v = \int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta$$

Apliquemos la fórmula (4.3)

$$\text{Luego, } R = \int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \tan \theta - \int \tan \theta \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$R = \sec \theta \tan \theta - \int (\tan \theta)^2 \sec \theta d\theta = \sec \theta \tan \theta - \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$$

$$R = \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta$$

$$R = \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta$$

$$R = \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta$$

Recuerde que:

$$R = \int \sec^3 \theta d\theta$$

Así que:

$$R = \sec \theta \operatorname{tg} \theta - \underbrace{\int \sec^3 \theta d\theta} + \int \sec \theta d\theta$$

Esto quiere decir que la integral  $R$  se reproduce y la podemos expresar como:

$$R = \sec \theta \operatorname{tg} \theta - R + \int \sec \theta d\theta$$

Usando la regla de integración inmediata 14.

$$R + R = \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln[\sec \theta + \operatorname{tg} \theta]$$

$$R = \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln[\sec \theta + \operatorname{tg} \theta]}{2}$$

---

$$\therefore R = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln[\sec \theta + \operatorname{tg} \theta] + C \quad \blacksquare$$

---

Culminaremos este capítulo con otra integral que se reproduce dentro del proceso de integración:

---

**Ejemplo 4.6.7.**  $I = \int e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) dx$ 

---

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen}(ax + b) &\Rightarrow du = a \cos(ax + b) dx ; dv = e^{ax+b} dx \Rightarrow v = \int e^{ax+b} dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax+b} \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (4.3)

$$I = \operatorname{sen}(ax + b) \frac{1}{a} e^{ax+b} - \int \frac{1}{a} e^{ax+b} a \cos(ax + b) dx$$

$$I = \operatorname{sen}(ax + b) \frac{1}{a} e^{ax+b} - \int e^{ax+b} \cos(ax + b) dx$$

Debemos aplicar el método IPP para:

$$I_1 = \int e^{ax+b} \cos(ax + b) dx$$

$$u_1 = \cos(ax + b) \Rightarrow du_1 = -a \operatorname{sen}(ax + b) dx ;$$

$$dv_1 = e^{ax+b} dx \Rightarrow v_1 = \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

$$I_1 = \cos(ax + b) \frac{1}{a} e^{ax+b} - \int \frac{1}{a} e^{ax+b} (-a \operatorname{sen}(ax + b)) dx$$

Luego:

$$I_1 = \frac{1}{a} e^{ax+b} \cos(ax + b) + \int e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) dx$$

Sustituycamos  $I$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) - \left( \frac{1}{a} e^{ax+b} \cos(ax + b) + \int e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) dx \right)$$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) - \frac{1}{a} e^{ax+b} \cos(ax + b) - \underbrace{\int e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) dx}$$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) - \frac{1}{a} e^{ax+b} \cos(ax + b) - \underbrace{I}$$

Esto quiere decir que la integral  $I$  se reproduce y la podemos escribir como:

$$2I = \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) - \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{cos}(ax + b)$$

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{sen}(ax + b) - \frac{1}{a} e^{ax+b} \operatorname{cos}(ax + b) \right)$$

---


$$\therefore I = \frac{1}{2a} e^{ax+b} (\operatorname{sen}(ax + b) - \operatorname{cos}(ax + b)) + C \quad \blacksquare$$


---

#### 4.6. Ejercicios propuestos:

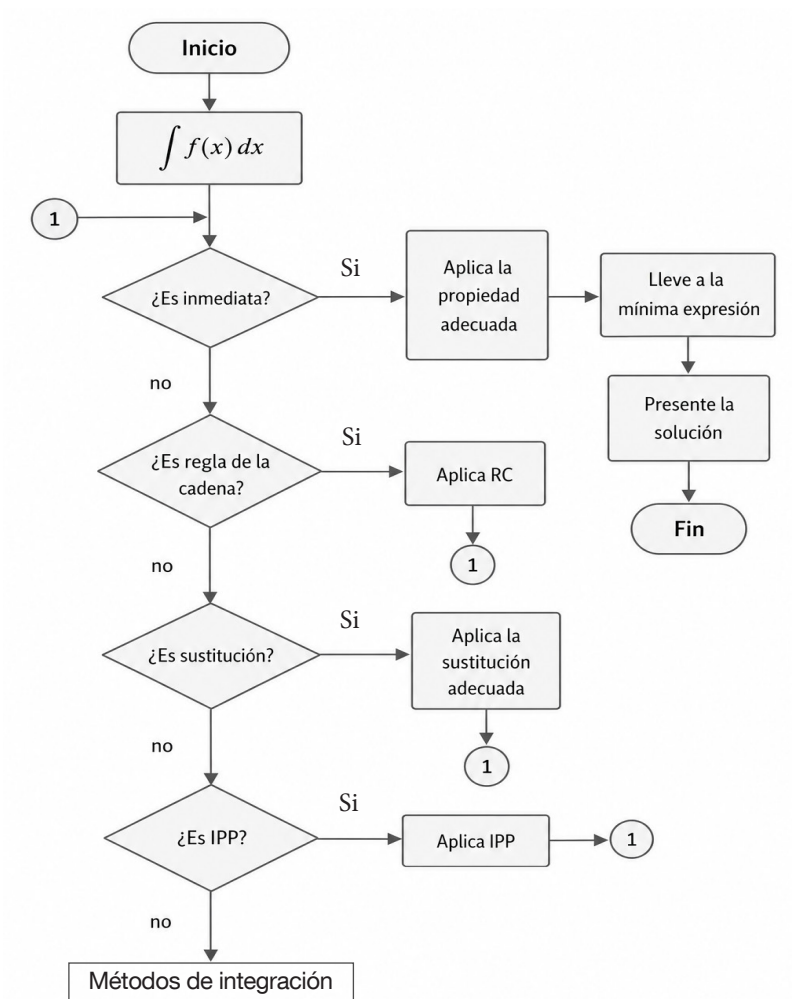
$$1. \int \frac{\operatorname{Ln}(x^2)}{x^2} dx \quad 2. \int (x^2 + 1) \operatorname{Ln}(x) dx \quad 3. \int x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx \quad 4. \int \operatorname{cosec}^3 x dx$$

$$5. \int e^{+\operatorname{Ln} x} dx \quad 6. \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx \quad 7. \int x \sec x \operatorname{tg} x dx \quad 8. \int \operatorname{arcsec}(\sqrt{x}) dx$$

$$9. \int x \sec^2 3x dx \quad 10. \int x 10^{2x} dx \quad 11. \int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \quad 12. \int \operatorname{cos} x \operatorname{Ln}(\operatorname{sen} x) dx$$

## Profundizando en la identificación

Uno de los objetivos de este libro es proveer al estudiante una herramienta que le ayude a identificar el proceso de resolución de una integral; es decir, establecer si la integral se resuelve en forma inmediata, o por: regla de la cadena, sustitución, por partes. He propuesto usar el diagrama de flujo que se presenta abajo, la idea es que el estudiante pueda Podemos usar este recurso para pensar cómo se resuelve la integral y cuál es el proceso de entrada para llegar a la solución.

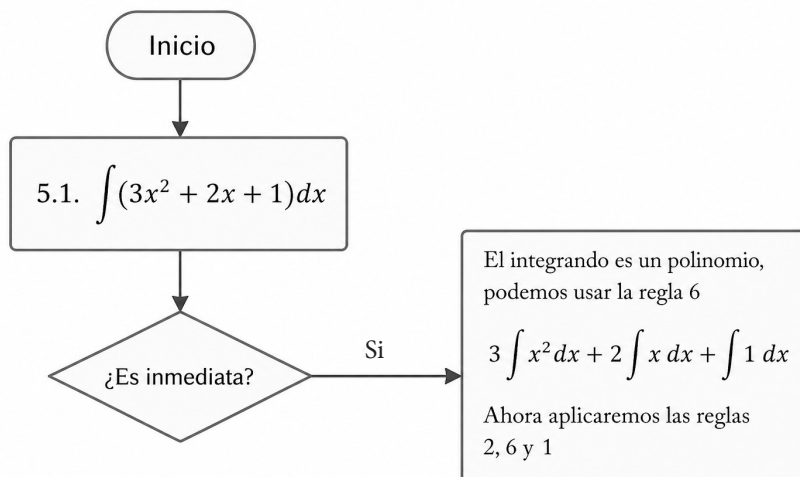


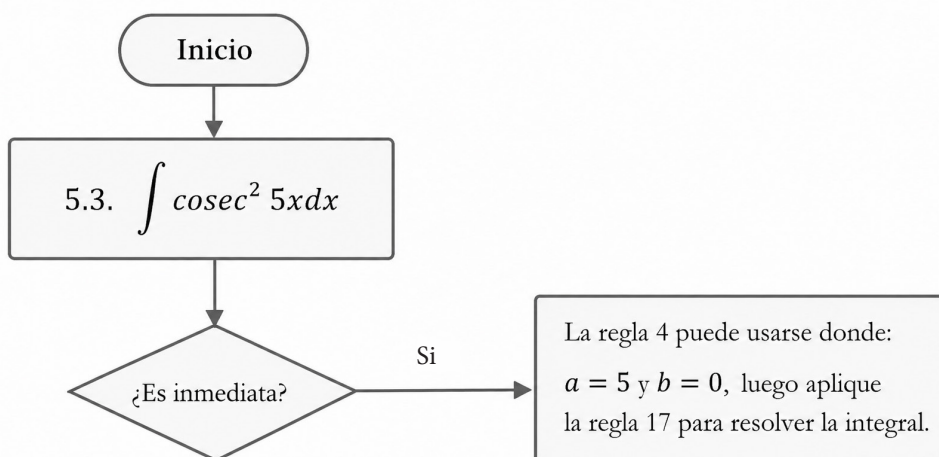
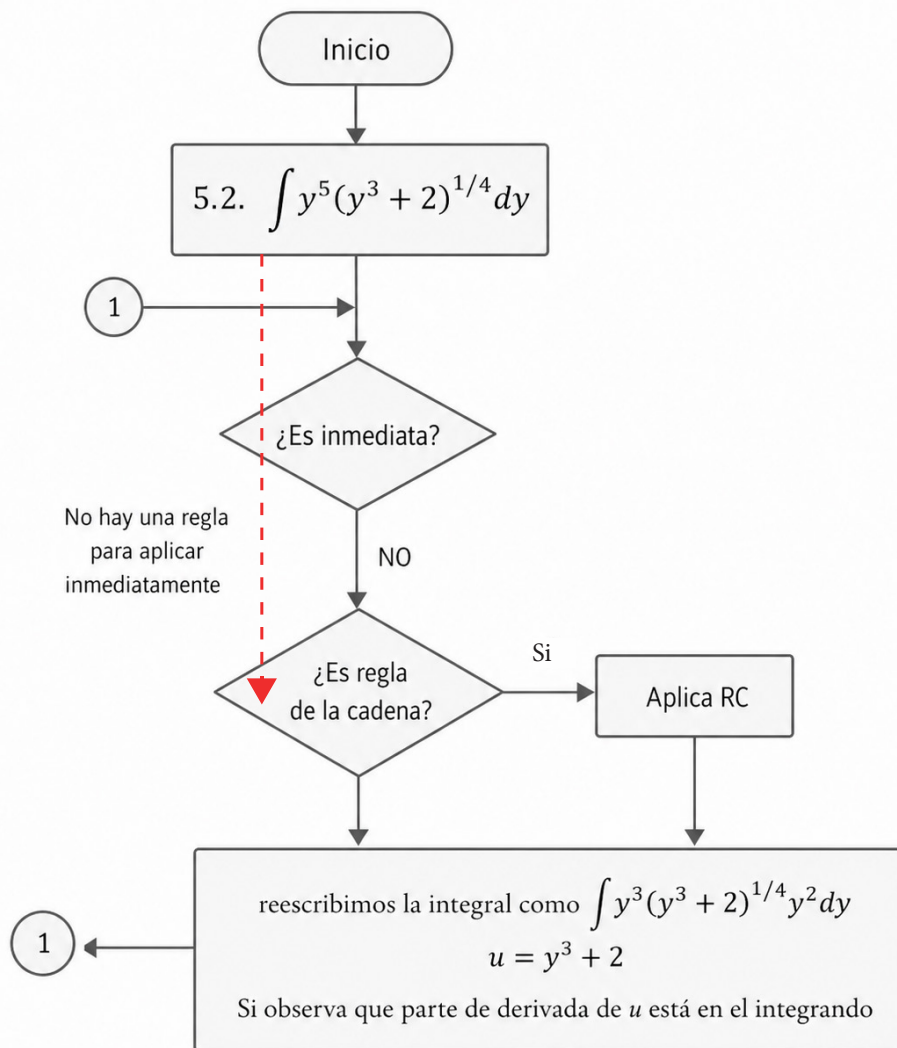
En este capítulo no mostraremos todo el proceso para la solución de la integral; nos enfocaremos en el proceso de identificación y para ello presentaré algunos ejercicios y sus discusiones. Luego, te propondré otros ejercicios con el objetivo de que tú los puedas resolver en su totalidad. Es bueno destacar que el algoritmo declara la existencia de *métodos de integración* específicos para algunas integrales y estos deben ser estudiados en libros un poco más avanzados. En esta obra llegaremos hasta el método de integración por partes.

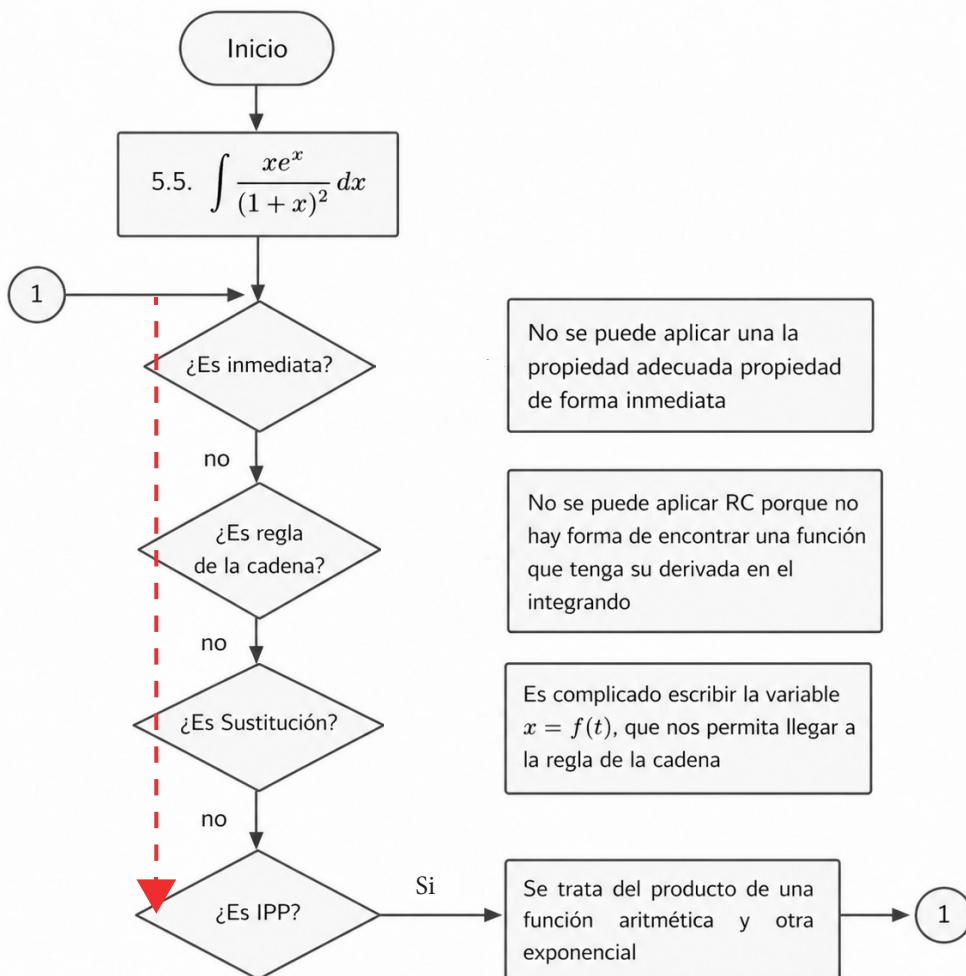
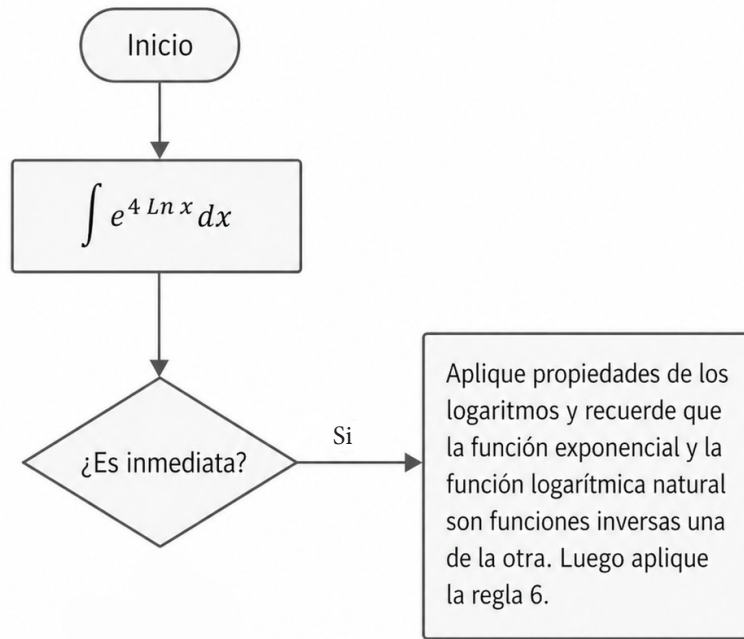
*Ejercicios de identificación*

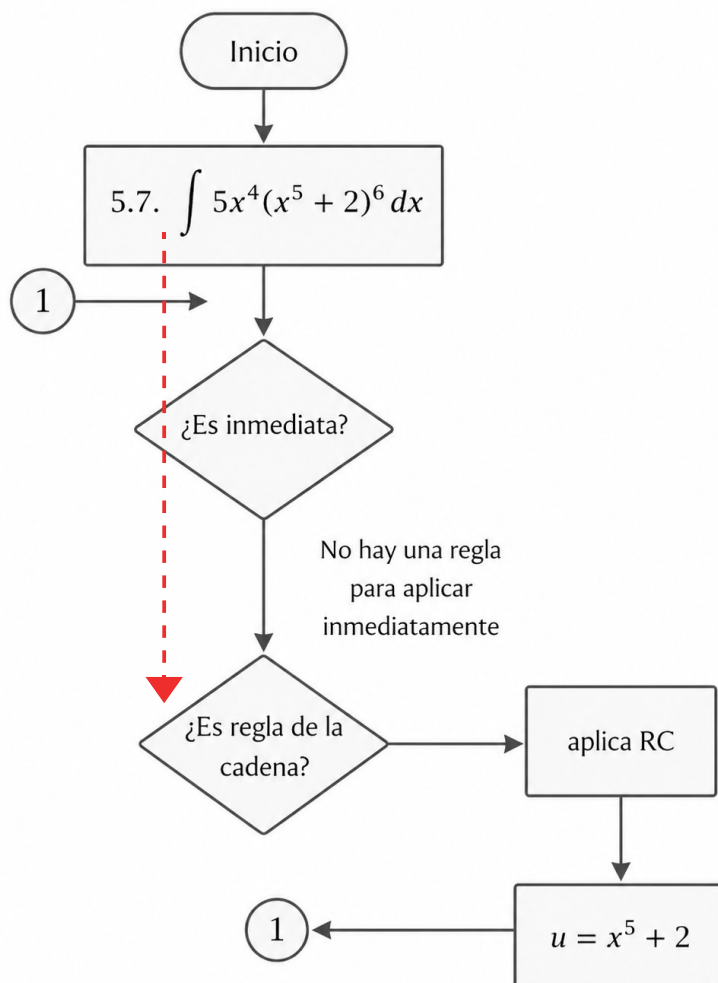
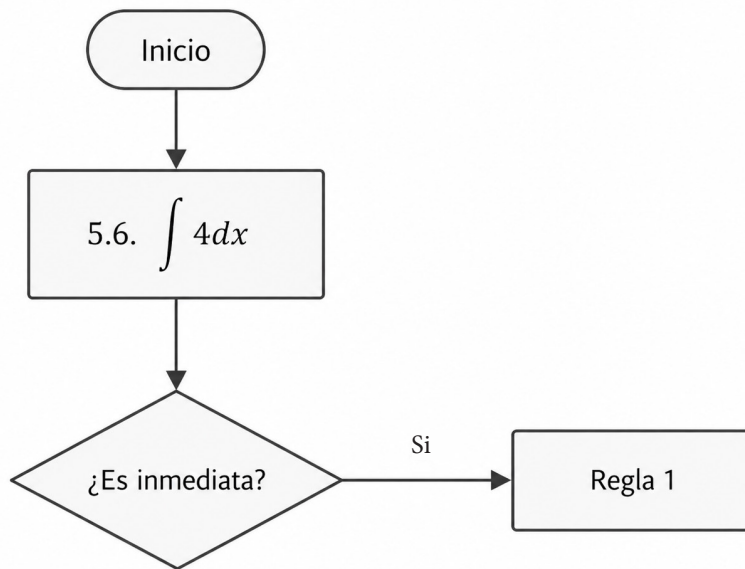
- |  |  |  |
|--|--|--|
| 5.1. $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$  | 5.2. $\int y^5(y^3 + 2)^{1/4}dy$               | 5.3. $\int \operatorname{cosec}^2 5x dx$               |
| 5.4. $\int e^{4 \operatorname{Ln} x} dx$                               | 5.5. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$            | 5.6. $\int 4dx$  |
| 5.7. $\int 5x^4(x^5 + 2)^6 dx$   | 5.8. $\int \sqrt{5x + 2} dx$                   | 5.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x + 5} + 8}$               |
| 5.10. $\int \left( \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^5}} \right) dx$ | 5.11. $\int x^3 \operatorname{Ln} x dx$        | 5.12. $\int \operatorname{Ln} (x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ |
| 5.13. $\int e^{3x+1} \operatorname{sen}(3x + 1) dx$                    | 5.14. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | 5.15. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 16}}$            |

*Solución a los ejercicios de identificación*

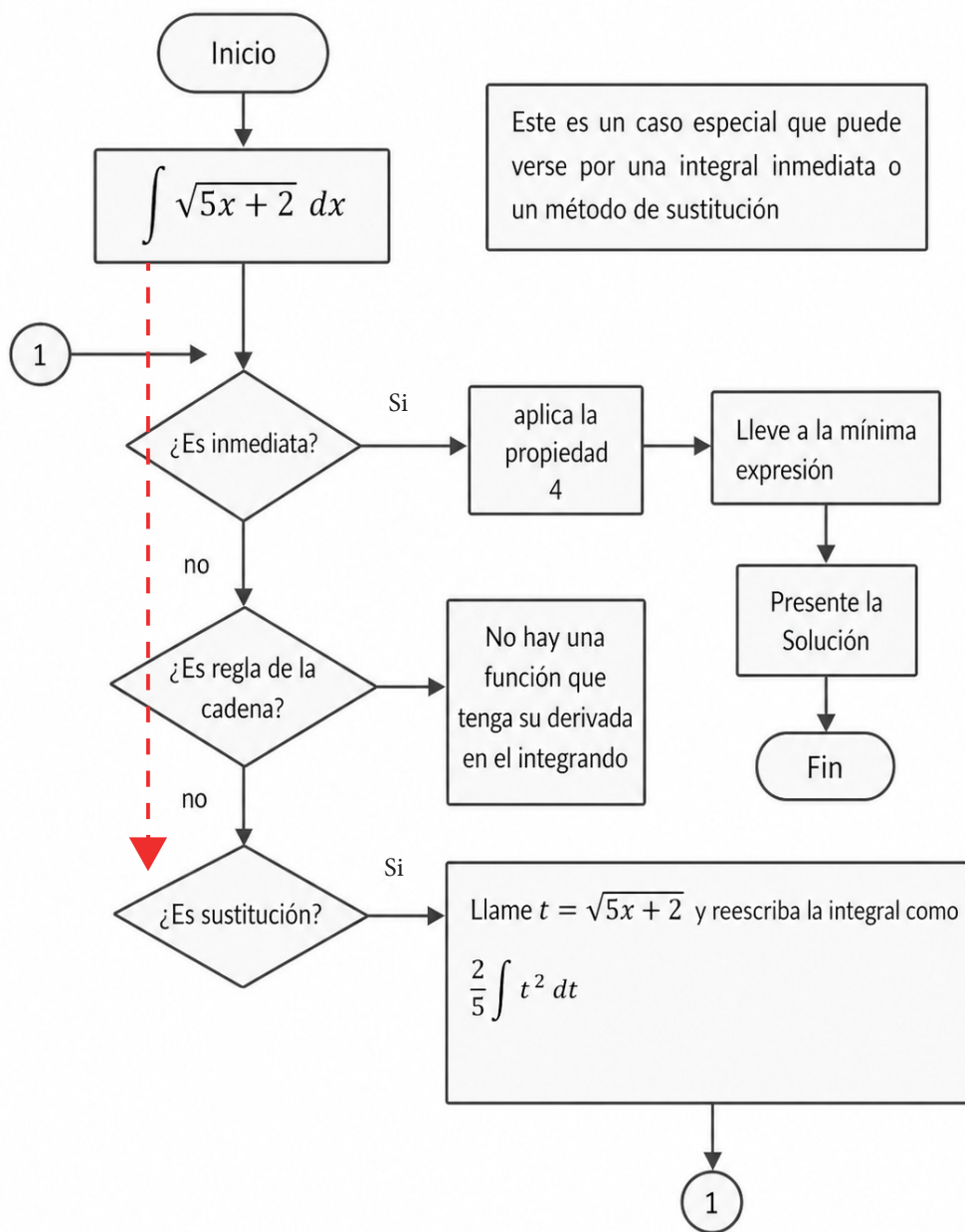


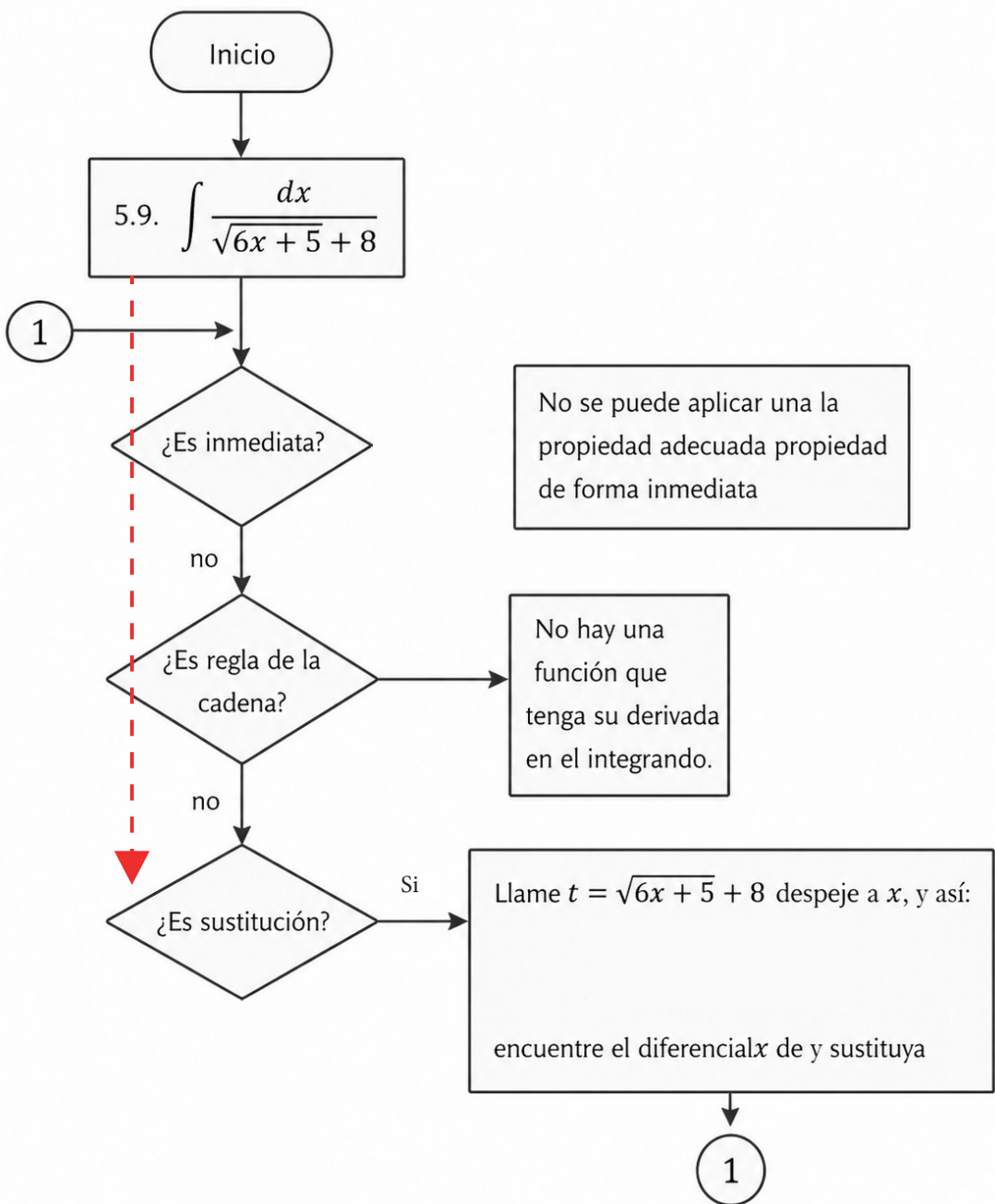


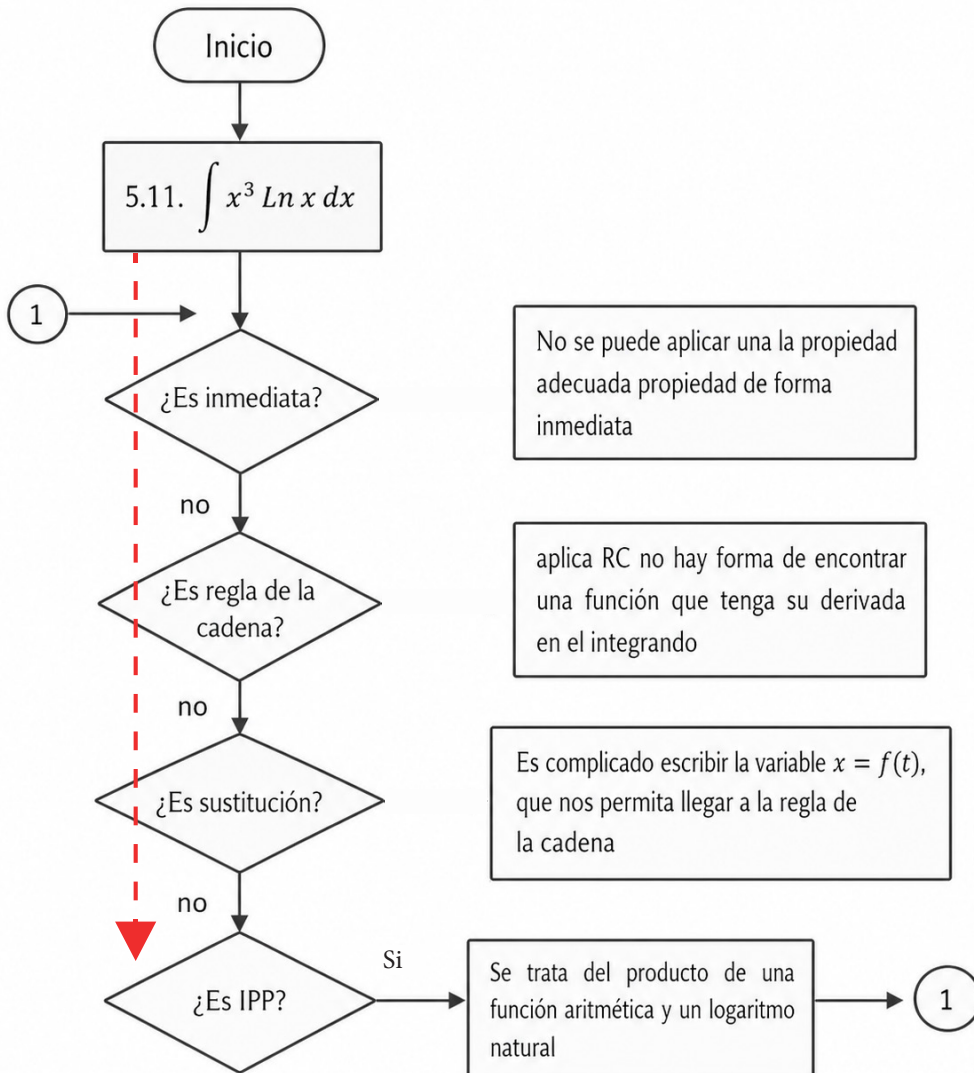
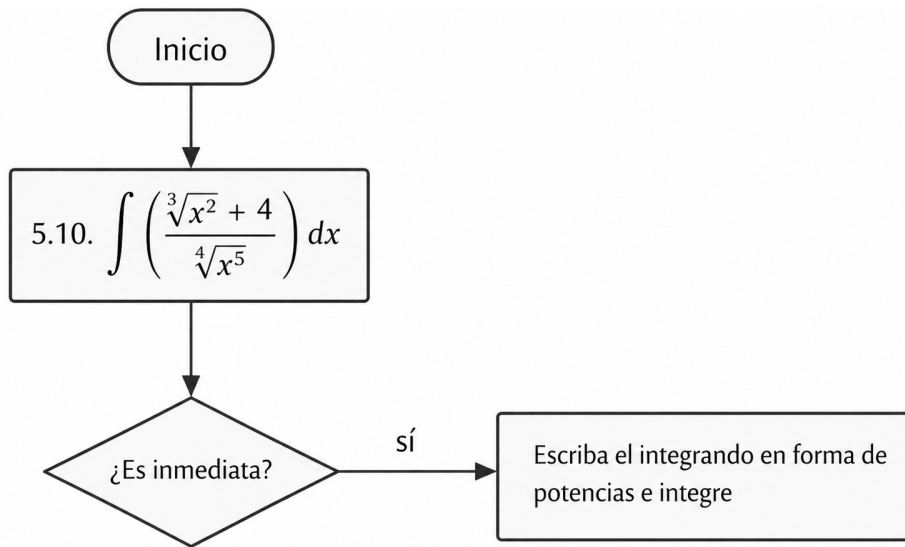


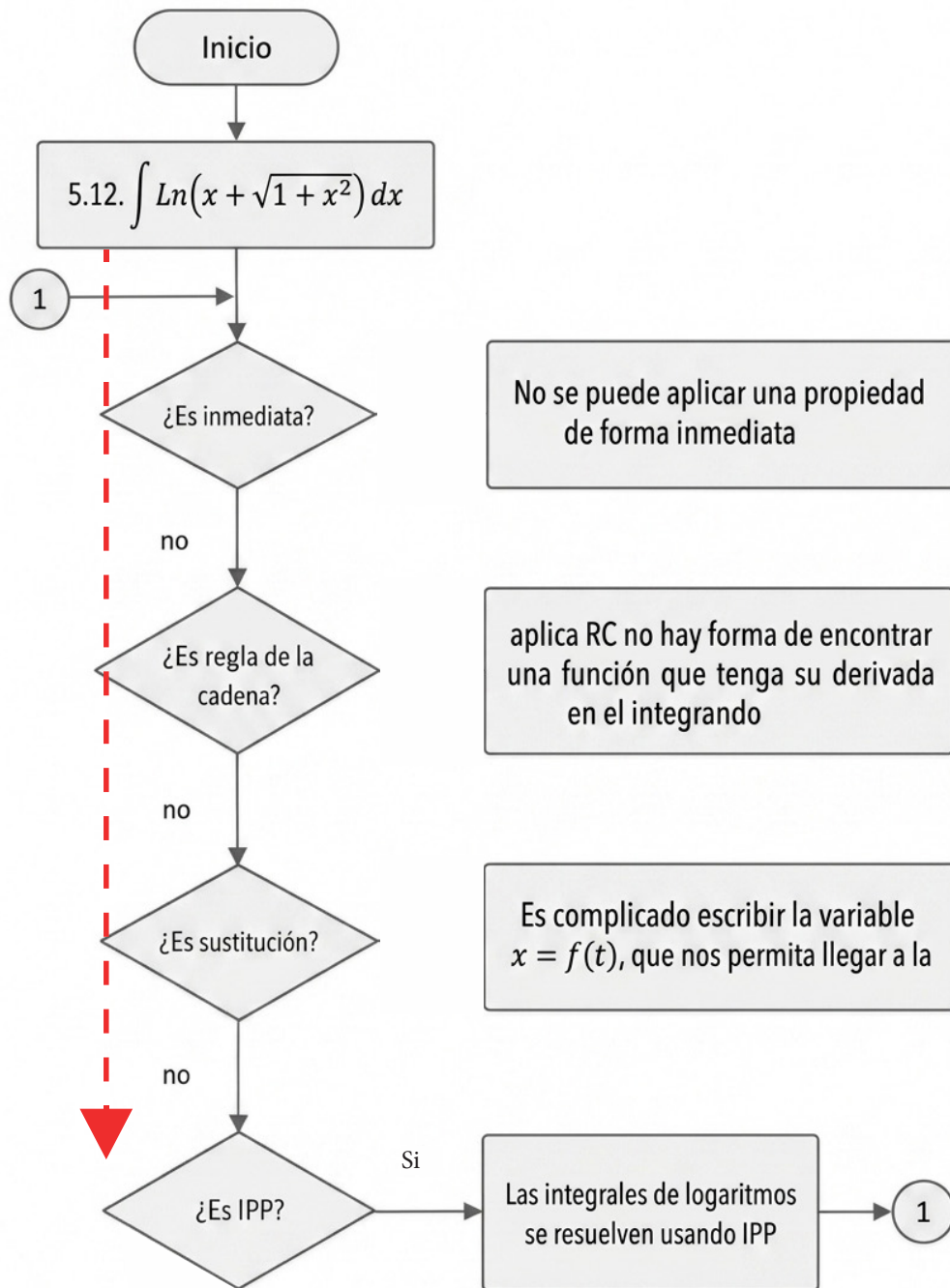


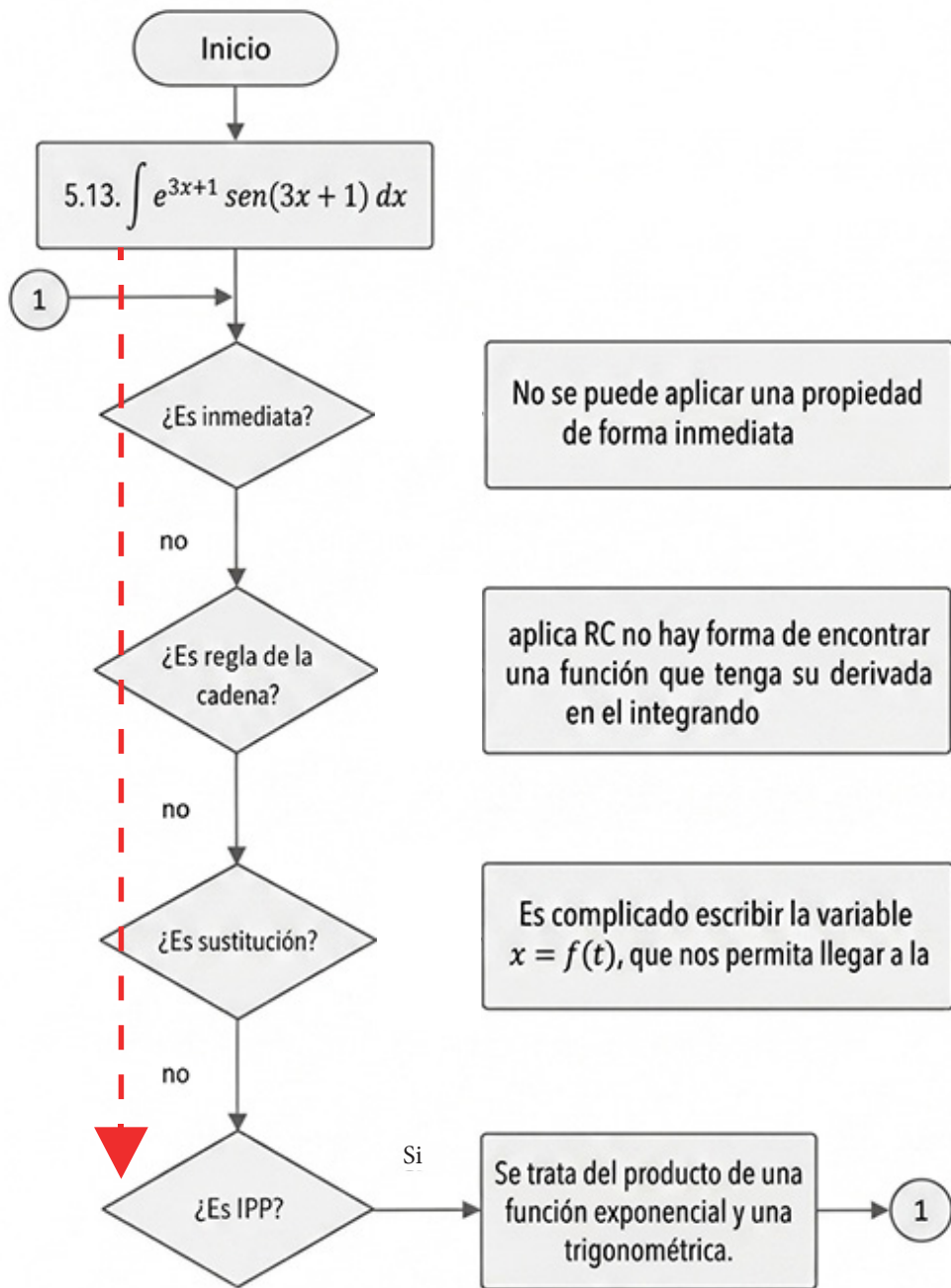
Observe si identificamos la función  $u$  que está en el integrando y también su derivada, entonces podemos usar la regla de la cadena

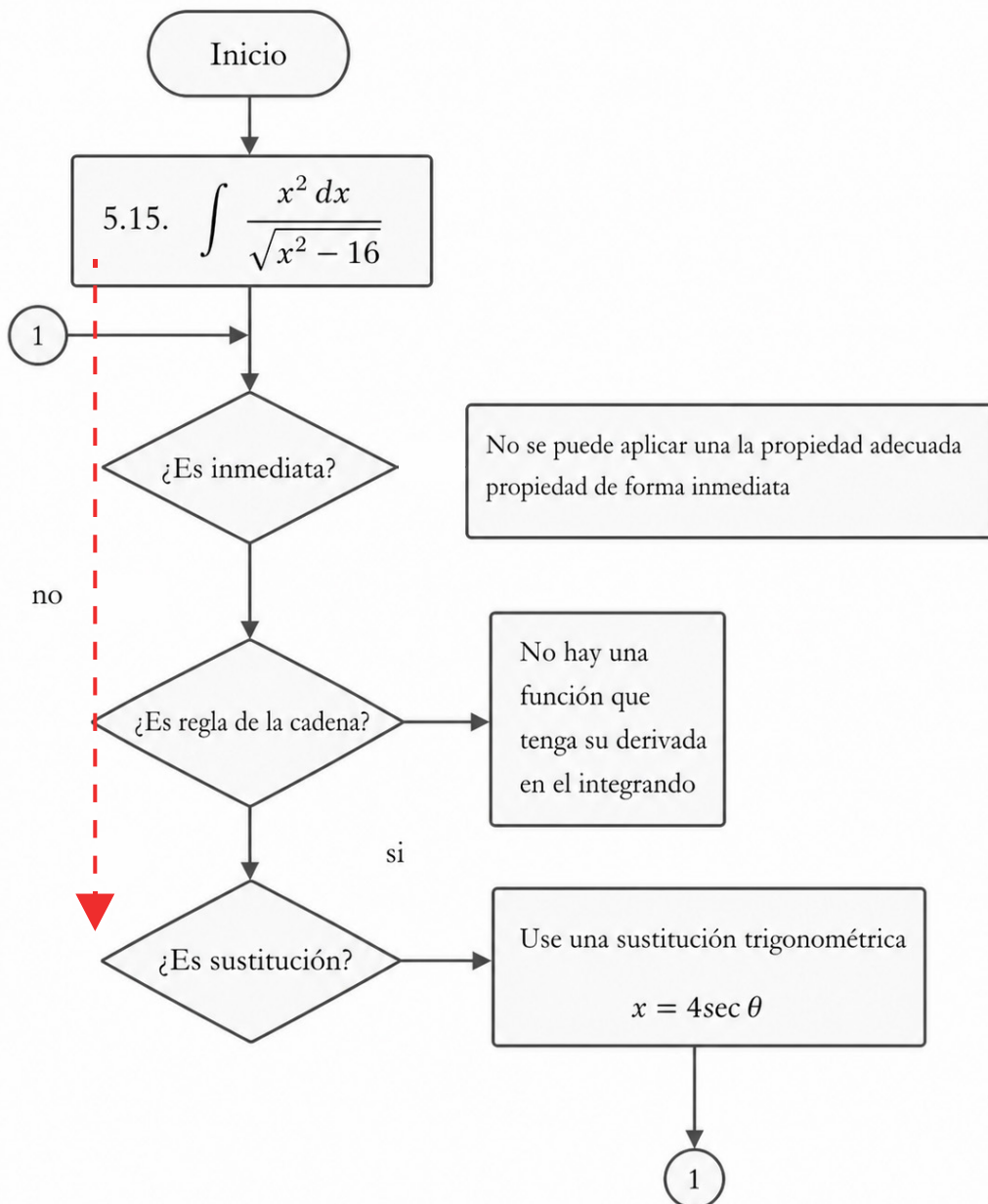
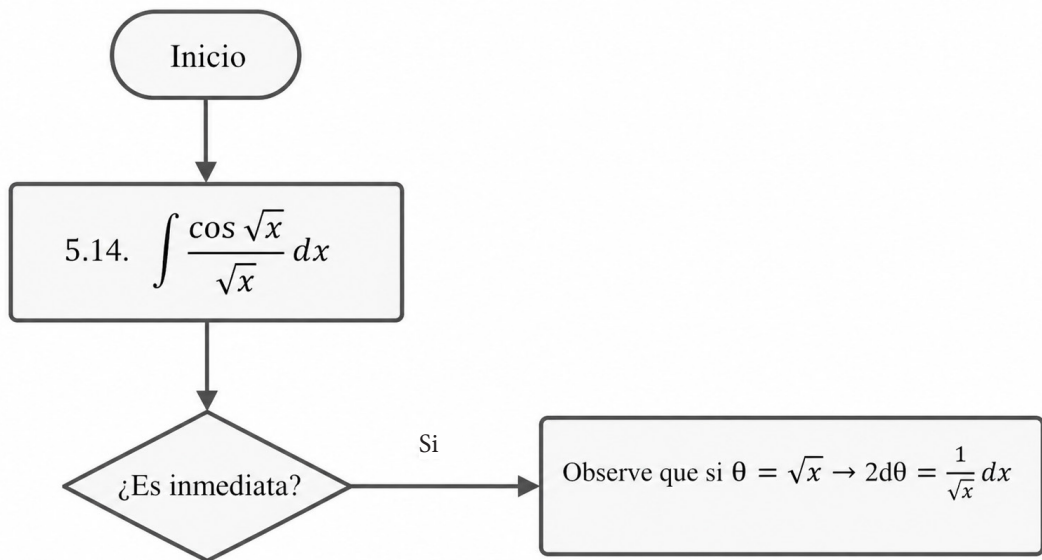












## Algunas aplicaciones

En este capítulo veremos aplicaciones del cálculo integral a las ecuaciones diferenciales ordinarias y al cálculo de áreas entre curvas. No pretendo hacer un capítulo extenso de aplicaciones; es tan solo una forma de iniciación al uso del cálculo integral.

### 6.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Tomemos la definición que nos ofrece en Zill & Cullen (2008).

#### Definición de ecuación diferencial (ED):

Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se denomina **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Nosotros nos vamos a referir únicamente a las EDO de primer orden, de grado uno y de variables separadas o separables (Zill & Cullen, 2017, p. 6-8).

#### Definición de solución de una EDO:

Toda función  $f$ , definida sobre un intervalo  $I$  que posea al menos  $n$  derivadas continuas sobre  $I$  y que al ser sustituida en una ecuación diferencial ordinaria de  $n$ -ésimo orden reduzca la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación sobre el intervalo.

Vamos ahora a encontrar soluciones de forma explícita o implícita de EDO de variables separadas o separables, que representan las ED más sencillas (Tsopméné, 2023; Zill, 2012; Zill & Cullen, 2008; Zill & Cullen, 2017). Por otro lado, te invito a completar los ejercicios en cuanto a la resolución de las integrales.

Encuentra la solución general de las siguientes EDO.

---

### **Ejemplo 6.1.1.** $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$

---

Solución

**Paso 1:** Buscamos expresar la ecuación en una forma más adecuada

$$(y^2 + xy^2) \frac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0 \quad (1)$$

Multiplicando a (1) por  $dx$ :

$$(y^2 + xy^2)dy + (x^2 - yx^2)dx = 0 \quad (2)$$

**Paso 2:** Observemos la forma de la EDO, si escribimos a (2) como:

$$y^2(1 + x)dy + x^2(1 - y)dx = 0 \quad (3)$$

**Paso 3:** Identificamos la EDO como de variable separable y usamos  $\mu = \frac{1}{(1+x)(1-y)}$  para llevarla a variables separadas, multiplicando a (3) por  $\mu$ , nos queda:

$$\frac{y^2}{(1 - y)} dy + \frac{x^2}{(1 + x)} dx = 0 \quad (4)$$

**Paso 4:** Integrando miembro a miembro a (4)

$$\int \frac{y^2}{(1 - y)} dy + \int \frac{x^2}{(1 + x)} dx = C \quad (5)$$

**Paso 5:** Resolvemos las integrales de (5) (para ello podemos tomar las ideas del ejemplo 3.2.1) y obtenemos la solución general:

---

$$\therefore \ln \left( \frac{1 + x}{1 - y} \right)^2 + x^2 - y^2 - 2x - 2y = C \quad \blacksquare$$

---

En los ejercicios que se presentan a continuación, te invito a que coloques cada uno de los pasos para la resolución de las ecuaciones diferenciables ordinarias.

---

### **Ejemplo 6.1.2.** $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

---

Solución

$$x\sqrt{1+y^2} + y\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2} = 0$$

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$$

Usemos:  $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2}}$ , multiplicando por  $\mu$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$$

A estas integrales las podemos resolver usando la regla de la cadena para la integración:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = K$$

---

$$\therefore \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C; C = K/2 \quad \blacksquare$$

---

---

### **Ejemplo 6.1.3.** $y' = ax + by + c$ ( $a, b$ y $c$ son constantes)

---

Solución: EDO reducible a variables separables de la forma.

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

Se efectúa el cambio  $u=ax+by+c$

Diferenciando en forma implícita con respecto a  $x$ ,  $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

Por otro lado,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

Sustituyendo  $u$  y  $\frac{dy}{dx}$  en la ED 3 nos queda que:

$$\frac{1}{b} \left( \frac{du}{dx} - a \right) = u$$

Entonces:

$$\frac{du}{bu + a} = dx$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{bu + a} = \int dx + C$$

La solución de la ecuación diferencial es:

---

$$\therefore C e^{bx} = b(ax + by + c) + a \quad \blacksquare$$

---

---

### **Ejemplo 6.1.4. $xy^2(x + y)^2 y' = a^2$**

---

Solución: EDO de primer orden reducible a variable separable. ¿Por qué?

$$\text{Donde } u = x + y \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Sustituyendo y operando:

$$du = \left( \frac{a^2}{u^2} + 1 \right) dx$$

$$\text{Luego, } \int \frac{u^2}{a^2 + u^2} du = \int x dx + C$$

---

$$\therefore x + y = a \operatorname{tg} \left( \frac{y}{a} + C \right) \quad \blacksquare$$

---

---

### Ejemplo 6.1.5. $xy^2(xy' + y) = a^2$

---

**Solución:**

EDO de primer orden reducible a variable separable de la forma:  $yf(xy) dx + xg(xy) dy = 0$ . Veamos cómo se llegó a esta conclusión. Se efectúa el cambio:

$$z = xy \rightarrow y = \frac{z}{x} \rightarrow dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

$$z^2 dy + \left( z \frac{z^2}{x^2} - a^2 \right) dx = 0$$

$$z^2 \left( \frac{xdz - zdx}{x^2} \right) + \frac{(z^3 - x^2 a^2)}{x^2} dx = 0$$

$$z^2 x dz - z^3 dx + z^3 dx - x^2 a^2 dx = 0$$

$$z^2 dz - x a^2 dx = 0$$

Integrando:

$$\int z^2 dz - \int x a^2 dx = C$$

Solución general

---

$$\therefore y^3 = \frac{3a^2 x^2 + C}{2x^3} \blacksquare$$

---

### 6.2. Ejercicios propuestos:

1.  $(1 + y^2)dx = xdy$

2.  $e^{-y}(1 + y') = 1$

3.  $y' = a^{x+y} (a > 0, a \neq 1)$

4.  $(1 + e^x)yy' = e^y$

5.  $y' = \text{sen}(x - y)$

6.  $(x + y)^2 y' = a^2$

### 6.3. La integral definida y el cálculo de áreas entre curvas

En la sección anterior tratamos unas de las aplicaciones de la integral en la resolución de EDO. Ahora vamos a mirar un poco sobre la integral definida; partiremos de algunos teoremas que permiten realizar la evaluación de una integral y nos concentraremos en resolver algunos ejercicios que involucran integrales definidas, pero haremos mayor énfasis en el cálculo de áreas entre curvas.

La definición de la integral definida parte de la suma de Riemann; sin embargo, trabajaremos con un hallazgo hecho por Isaac Newton en 1666 sobre la evaluación de las integrales. Para ello, vamos a citar el teorema 6.1. La demostración de este teorema la puedes encontrar en libros de cálculo un poco más avanzados, como por ejemplo (Asvi & Ignu, 2020).

#### TEOREMA 6.1: Evaluación de integrales

Si  $F$  es una primitiva de la función continua  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La notación  $\int_a^b f(x)dx$  nos indica que la integral indefinida  $\int f(x) dx$  en el intervalo  $[a, b]$ , donde “ $a$ ” se llama límite inferior y “ $b$ ” límite superior de la integral. A esta forma de escribir la integral la llamamos integral definida (Asvi & Ignu, 2020; Feldman et al., 2023; Paltineanu et al., 2022; Swokowski & Jeffery, 2008). La integral definida (cuando existe) es un número que puede tener varios significados según la connotación de lo que estemos estudiando, podemos usarla para definir probabilidades de una variable aleatoria continua (Hass et al., 2023; Larson & Edwards, 2013), área de una curva con respecto al eje de las abscisas (ordenadas), área entre dos curvas, etc. Usualmente, la expresión  $\int_a^b f(x)dx$  la leemos como la integral de “ $a$ ” a “ $b$ ” de  $f(x)$  diferencial de  $x$ .

En los capítulos anteriores, hemos resuelto varias integrales indefinidas, por ejemplo:

$$I = \int (3 + x)^2 dx = \frac{(3 + x)^3}{3} + C$$

$$I = \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = \sqrt[n]{nx} + C$$

Ahora vamos a resolver estas integrales en un intervalo usando el teorema 6.1.

a) Encuentra el valor de:

$$I = \int_0^2 (3 + x)^2 dx$$

Para aplicar el teorema 6.1, veamos  $\frac{(3+x)^3}{3}$  es una primitiva de  $(3 + x)^2$ , por lo tanto:

$$I = \int_0^2 (3 + x)^2 dx = \frac{(3+2)^3}{3} - \frac{(3+0)^3}{3} = \frac{5^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3}$$

$$\therefore I = \int_0^2 (3 + x)^2 dx = \frac{98}{3} \blacksquare$$

Una notación que suele ayudar a la resolución de las integrales definidas es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Asumiendo esta notación para el ejemplo anterior tenemos que:

$$I = \int_0^2 (3 + x)^2 dx = \left. \frac{(3 + x)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{(3 + 2)^3}{3} - \frac{(3 + 0)^3}{3} = \frac{5^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3}$$

b) Evalúe la integral  $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$  en el intervalo  $[3,4]$  cuando  $n = 3$ , esto se resume a evaluar:

$$\int_3^4 (3x)^{-\frac{2}{3}} dx = \left. \sqrt[3]{3x} \right|_3^4 = \sqrt[3]{3 \cdot 4} - \sqrt[3]{3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})$$

Un caso particular es la integración por partes. La integral definida por partes la podemos escribir como:

$$\int_a^b u dv = uv ]_a^b - \int_a^b v du \tag{6.1}$$

Recordemos que:

$$I = \int \text{Ln}x dx = x \ln x - \int dx = x \text{Ln}x - x + C$$

A esta integral la resolvimos usando el método de integración por partes, donde:

$$I = \underbrace{\int \text{Ln}x dx}_{\int u dv} = \underbrace{x \ln x}_{uv} - \underbrace{\int dx}_{\int v du}$$

Vamos a resolver a la siguiente integral definida

$$\int_1^2 \text{Ln}x dx$$

Aplicando la expresión (6.1):

$$\int_1^2 \text{Ln}x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx$$

$$\int_1^2 \text{Ln}x dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2$$

$$\int_1^2 \text{Ln}x dx = [(2 \text{Ln}2 - 2) - (1 \text{Ln}1 - 1)] - (2 - 1)$$

---

$$\therefore \int_1^2 \text{Ln}x dx = \text{Ln}4 - 2 \quad \blacksquare$$

---

La integral definida tiene algunas propiedades que queremos presentar en esta sección y las puedes encontrar en (Feldman et al. 2023; Leithold, 2004; Love, 2022; Paltineanu et al., 2022; Strang, 2023; Todhunter, 2022):

### 6.3.1. Propiedades básicas de las integrales

**Integral de una constante**

$$\int_a^b c dx = cx \Big|_a^b = c(b - a)$$

**Propiedad del múltiplo constante**

$$\int_a^b cf(x) dx = cF(x) \Big|_a^b = c(F(b) - F(a))$$

**Propiedad de la unión de intervalos**

Si  $a \leq x \leq b$ , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Propiedad de comparación**

Si  $m \leq f(x) \leq M$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b - a)$$

### 6.3.2. Área entre curvas

En el apartado anterior se habló de una de las aplicaciones de la integral definida y sus propiedades, a continuación, trataremos el área entre dos curvas, esta es una de las aplicaciones más común de la integral definida.

**DEFINICIÓN: ÁREA ENTRE DOS CURVAS (Edwards & Penney, 2012; Stewart, 2015)**

Sean  $f$  y  $g$  continuas tales que  $f(x) \geq g(x)$  para  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces el área  $A$  de la región acotada por las curvas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  y por las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$  es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

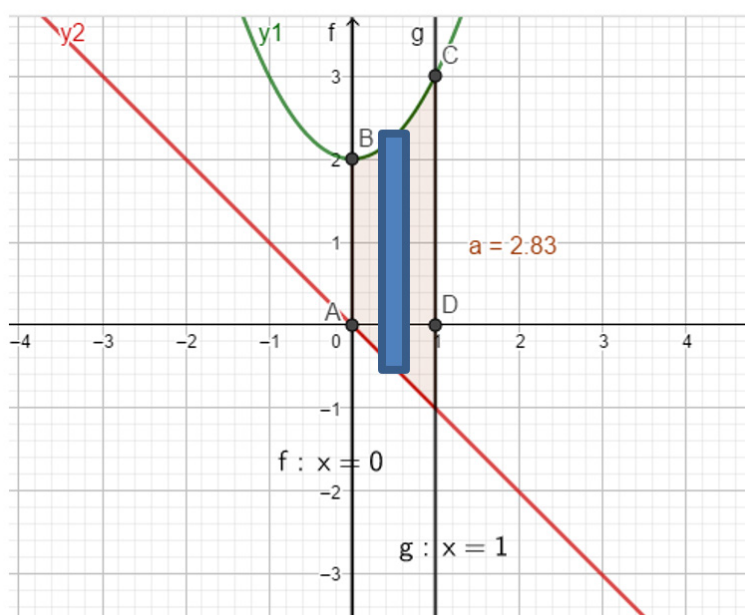
Muchos autores nos precisan que debemos observar la curva que está por encima o arriba, como por ejemplo 6.3.1, donde visualizamos que la gráfica de la curva  $y = x^2 + 2$  está por encima de  $y = -x$ . Edwards & Penney en 2012, sugieren que llamemos  $y_{sup}$  a la curva que está por encima, o superior, en este caso  $y_{sup} = x^2 + 2$ ; mientras que, la curva que está por debajo, o inferior la llamaremos  $y_{inf}$ , para el ejemplo  $y_{inf} = -x$ . Es decir, que en el integrando colocaremos  $y_{sup} - y_{inf}$ , la integral definida de esta diferencia nos dará el área entre las curvas, tal como se muestra a continuación.

---

### ***Ejemplo 6.3.1.***

---

Encuentra el área acotada por  $y = x^2 + 2$ ,  $y = -x$ , y las ordenadas  $x = 0$  y  $x = 1$ . tal como se muestra en la figura.



$$A = \int_0^1 y_{sup} - y_{inf} dx = \int_0^1 x^2 + 2 - (-x) dx = \int_0^1 x^2 + x + 2 dx =$$

$$A = \left. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right|_0^1 = \left( \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) - \left( \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right)$$

$$A = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) - (0)$$

$$A = \frac{2 + 3 + 12}{6} = \frac{17}{6}$$

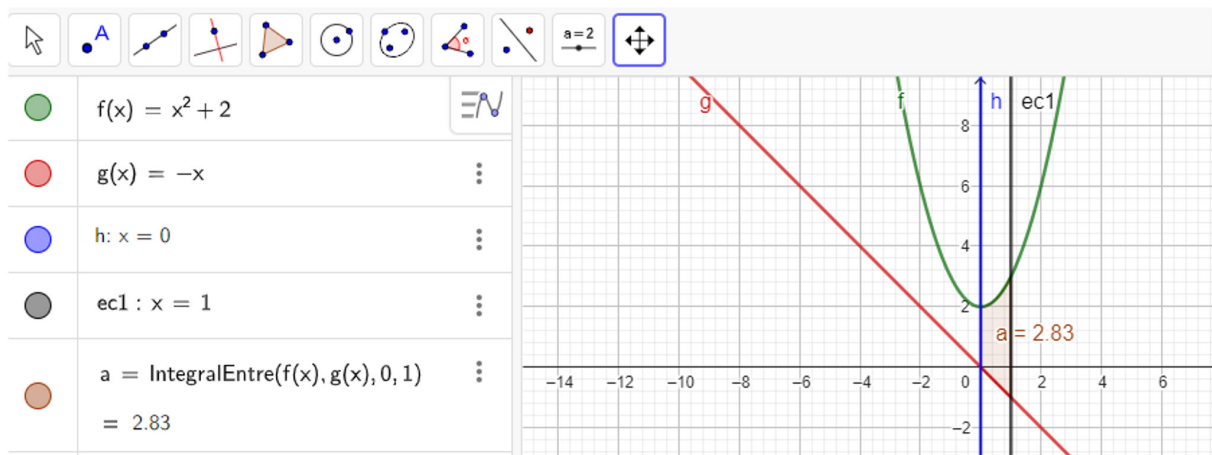
$$\therefore A = \frac{17}{6} \blacksquare$$

**Nota de interés:** A estos ejercicios puedes resolverlos usando paquetes matemáticos en línea, como por ejemplo Geogebra (<https://www.geogebra.org/classic?lang=es>). Este es un paquete muy sencillo de usar y práctico; si lo usas, puedes probar todo tu proceso. Aquí te dejo cómo resolver el problema anterior; solo tienen que declarar cada una de las funciones y luego usar la instrucción “IntegralEntre”, la cual tiene la siguiente sintaxis:

**IntegralEntre (<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)**

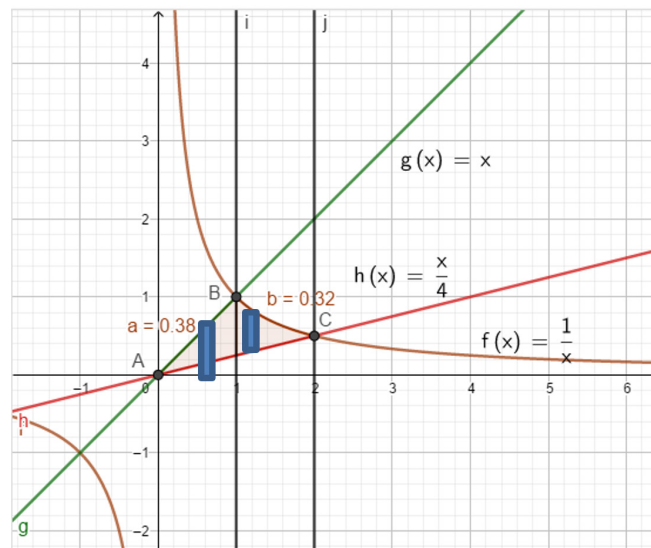
Primero, debes colocar la función que está por encima o techo; luego, la función que está por debajo o piso. Una vez que haces esto, declaras tus límites de integración. El paquete hará el resto.

Para más información puedes ir al sitio: [https://wiki.geogebra.org/es/Comando\\_IntegralEntre](https://wiki.geogebra.org/es/Comando_IntegralEntre).



### Ejemplo 6.3.2.

Encuentra el área acotada por la gráfica de las funciones  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ ,  $h(x) = \frac{x}{4}$  las ordenadas  $x = 0$  y  $x = 2$ . tal como se muestra en la figura.



Para resolver este ejercicio podemos mirar que existen dos subáreas que llamaremos  $A_1$  y  $A_2$ . La subárea  $A_1$  está limitada por  $g(x) = x$  y  $h(x) = \frac{x}{4}$  y las rectas paralelas  $x = 0$  y  $x = 1$ . Su cálculo es el siguiente:

$$A_1 = \int_0^1 x - \frac{x}{4} dx = \int_0^1 \frac{3x}{4} dx = \left. \frac{3x^2}{8} \right|_0^1 = \frac{3}{8}$$

Mientras que, la subárea  $A_2$  está limitada por  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $h(x) = \frac{x}{4}$  y las rectas paralelas  $x = 1$  y  $x = 2$ . Luego:

$$A_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{x}{4} dx = \left. \ln(x) - \frac{x^2}{8} \right|_1^2 = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

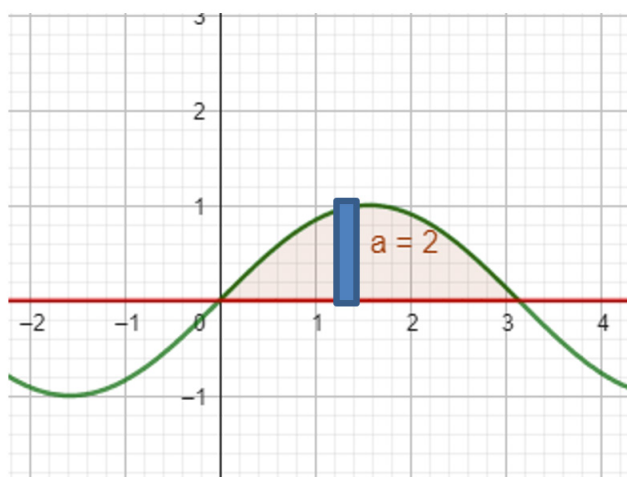
Entonces el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3}{8} + \ln 2 - \frac{3}{8}$$

$$\therefore A = \ln 2 \quad \blacksquare$$

### Ejemplo 6.3.3.

Encuentra el área acotada por la gráfica de la función  $f(x) = \sin(x)$ , el eje  $x$ , y las ordenadas  $x=0$  y  $x=\pi$ . tal como se muestra en la figura.



$$A = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -(-1 - 1) = 2$$

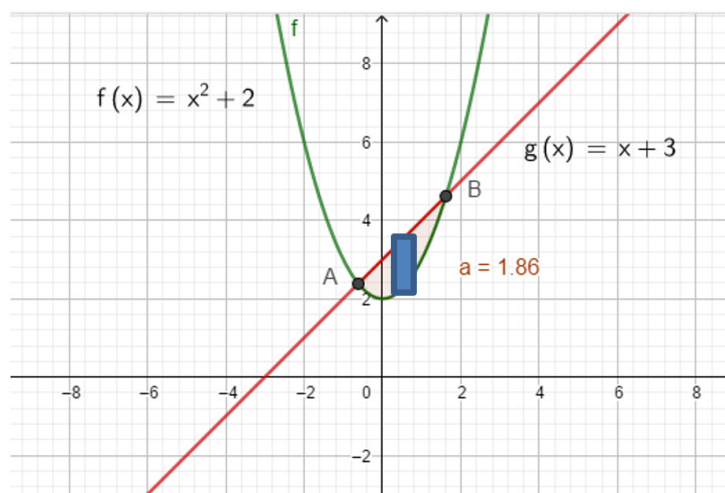
$$\therefore A = 2 \quad \blacksquare$$

---

### Ejemplo 6.3.4.

---

Encuentra el área acotada por la gráfica de las funciones  $f(x) = x^2 + 2$  y  $g(x) = x + 3$ , tal como se muestra en la figura.



**Paso 1:** Busquemos los puntos de intercepción entre las funciones; para ello diremos lo siguiente

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 2 = x + 3$$

$$x^2 - x + 2 - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\left(x - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) = 0$$

Luego;  $x_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$  y  $x_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

**Paso 2:** Planteamos la integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [(x^2 + 2) - (x + 3)]dx$$

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [(x^2 + 2) - (x + 3)]dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} x^2 - x - 1dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \Big|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$A = \left( \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right) - \left( \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right)$$

$$A = 1.863$$

**Nota:** Tal como hemos dicho anteriormente, podemos utilizar paquetes matemáticos para buscar soluciones a los problemas de cálculo integral. En esta ocasión te presento una rutina de Python para encontrar la solución de nuestro problema en particular.

```
from scipy.integrate import quad
import numpy as np
```

```
# Definición de las funciones
```

```
def f(x):
    return x**2 + 2
```

```
def g(x):
    return x + 3
```

```

# Límites de integración
a = (1 - np.sqrt(5)) / 2
b = (1 + np.sqrt(5)) / 2

# Función a integrar (diferencia entre
g(x) y f(x))
def integrand(x):
    return g(x) - f(x)

# Calculamos la integral definida
area, _ = quad(integrand, a, b)

print("El área acotada por las gráficas
de las funciones f(x) y g(x) es:",
area)

El área acotada por las gráficas de las funciones f(x)
y g(x) es: 1.8633899812498245

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de las funciones
def f(x):
    return x**2 + 2

def g(x):
    return x + 3

# Definimos el rango de valores de x
x = np.linspace(-2, 4, 400)

# Calculamos los valores de y para ambas
funciones
y_f = f(x)
y_g = g(x)

# Límites de integración
a = (1 - np.sqrt(5)) / 2
b = (1 + np.sqrt(5)) / 2

# Creamos la figura y los ejes
plt.figure(figsize=(8, 6))

# Graficamos las funciones
plt.plot(x, y_f, label='$f(x) = x^2 + 2$', color='blue')
plt.plot(x, y_g, label='$g(x) = x + 3$', color='green')

# Rellenamos el área acotada
plt.fill_between(x, y_f, y_g, where=(x
>= a) & (x <= b), color='yellow', alpha=0.5)

# Puntos de intersección
plt.scatter([a, b], [f(a), f(b)], color='red', zorder=5)

# Etiquetas y leyenda
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de $f(x)$ y $g(x)$
con el área acotada')
plt.legend()

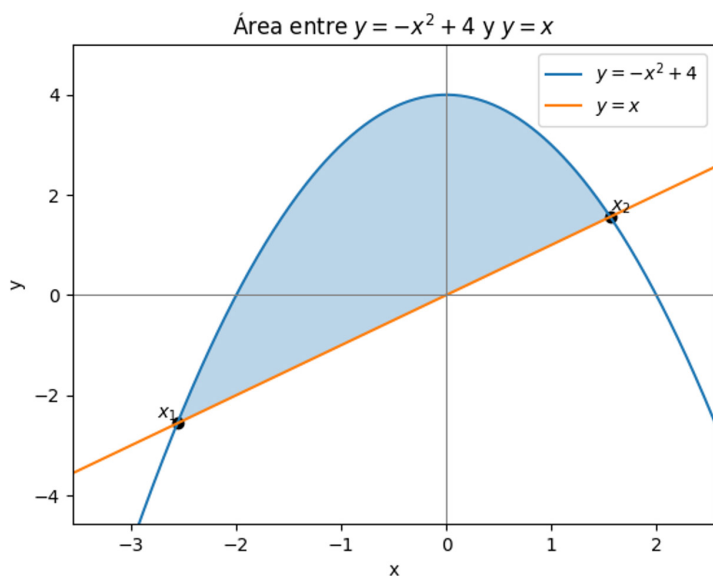
# Mostramos la gráfica
plt.grid(True)
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.show()

```



## Ejemplo 6.3.5.

Encuentra el área acotada por las gráficas de las funciones  $f(x) = -x^2 + 4$  y  $g(x) = x$ , tal como se muestra en la figura.



### Paso 1. Puntos de intersección

Buscamos  $f(x) = g(x)$ :

$$-x^2 + 4 = x \Rightarrow -x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

Resolviendo la cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Entonces:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

### Paso 2. Planteo del área

En el intervalo  $[x_1, x_2]$ , la curva superior es  $f(x) = -x^2 + 4x$  la inferior es  $g(x) = x$ .

Entonces:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} [(-x^2 + 4x) - x] dx = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 - x + 4) dx$$

### Paso 3. Integramos

$$\int (-x^2 - x + 4) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x$$

Evaluamos entre  $x_1$  y  $x_2$ :

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_2^2}{2} + 4x_2 - \left(-\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^2}{2} + 4x_1\right)$$

Eso se simplifica exactamente a:

$$A = \frac{17\sqrt{17}}{6}$$

y numéricamente:

$$A \approx 11.682$$

### Práctica con GeoGebra para el ejemplo 6.3.5.

Implementa las siguientes entradas en GeoGebra para obtener los resultados del ejercicio anterior

$$f(x) = -x^2 + 4$$

$$g(x) = x$$

$$x1 = (-1 - \sqrt{17}) / 2$$

$$x2 = (-1 + \sqrt{17}) / 2$$

$$A = (x1, f(x1))$$

$$B = (x2, f(x2))$$

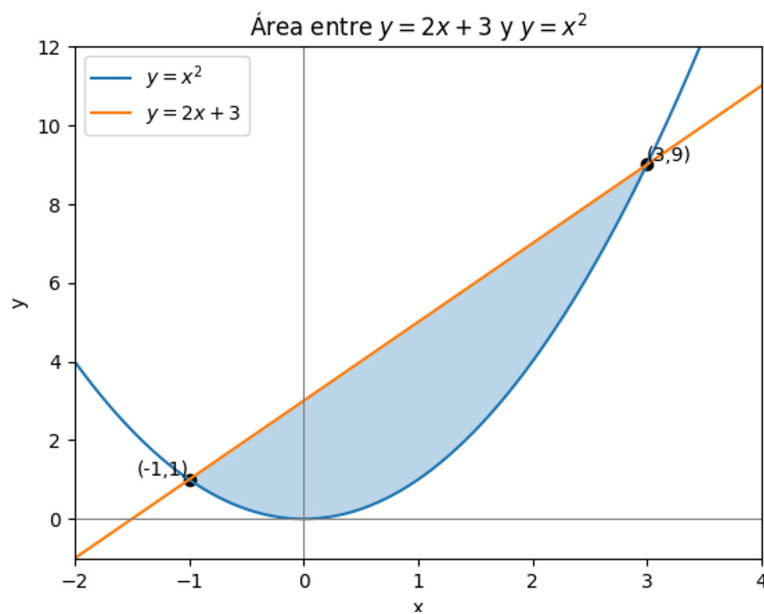
IntegralEntre = IntegralBetween[f, g, x1, x2]

---

## Ejemplo 6.3.6.

---

Encuentra el área encerrada entre las curvas  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 2x+3$ , tal como se muestra en la figura.



**Paso 1: Busquemos los puntos de intersección entre las curvas.**

Igualamos:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 2x + 3$$

Pasamos todo a un lado:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Factorizamos:

$$(x-3)(x+1) = 0$$

Entonces

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

**Paso 2: Planteamos la integral.**

En el intervalo  $[-1, 3]$ , la recta  $g(x) = 2x + 3$  está por encima de la parábola  $f(x) = x^2$ .

Por lo tanto:

$$A = \int_{-1}^3 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^3 [(2x + 3) - x^2] dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx$$

Calculamos la primitiva:

$$\int (-x^2 + 2x + 3) dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

Evaluamos entre  $-1$  y  $3$ :

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3$$

Para  $x = 3$ :

$$-\frac{27}{3} + 9 + 9 = -9 + 18 = 9$$

Para  $x = -1$ :

$$-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) = -\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 - 3 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

Entonces

$$A = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{27}{3} + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$$

Numéricamente:

$$A \approx 10.667$$

### Práctica con Python para el ejercicio 6.3.6.

Implementa las siguientes entradas en Python para obtener los resultados del ejercicio anterior:

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):

    return x**2

def g(x):

    return 2*x + 3

x1, x2 = -1, 3

xs = np.linspace(x1 - 1, x2 + 1, 400)

plt.figure()

plt.plot(xs, f(xs), label=r"$y=x^2$")

plt.plot(xs, g(xs), label=r"$y=2x+3$")

xs_fill = np.linspace(x1, x2, 400)

plt.fill_between(xs_fill, g(xs_fill), f(xs_fill), alpha=0.3)

# puntos de corte
```

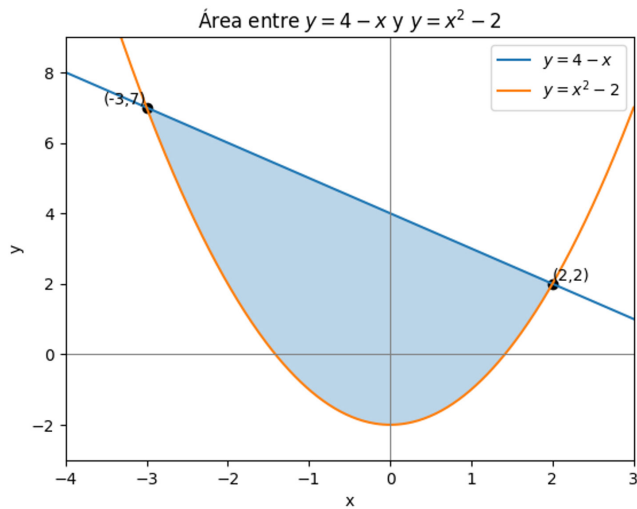
```
plt.scatter([x1, x2], [f(x1), f(x2)], color='black')
plt.text(x1, f(x1), "(-1,1)", ha="right", va="bottom")
plt.text(x2, f(x2), "(3,9)", ha="left", va="bottom")
plt.axhline(0, color='gray', linewidth=0.8)
plt.axvline(0, color='gray', linewidth=0.8)
plt.xlim(x1 - 1, x2 + 1)
plt.ylim(min(f(xs))-1, max(g(xs))+1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Área entre  $y=2x+3$  y  $y=x^2$ ")
plt.legend()
plt.show()
```

---

## Ejemplo 6.3.7.

---

Encuentra el área limitada por las curvas  $f(x) = 4 - x$  y  $g(x) = x^2 - 2$ , tal como se muestra en la figura.



**Paso 1: Busquemos los puntos de intersección entre las funciones.**

Planteamos:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - x = x^2 - 2$$

Reordenamos:

$$0 = x^2 - 2 + x - 4 = x^2 + x - 6$$

Factorizamos:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$$

Entonces:

$$x_1 = -3, x_2 = 2$$

**Paso 2: Planteamos la integral.**

En el intervalo  $[-3, 2]$ , la recta  $f(x) = 4 - x$  está por encima de la parábola  $g(x) = x^2 - 2$ .

El área es:

$$A = \int_{-3}^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-3}^2 [(4 - x) - (x^2 - 2)] dx = \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx$$

Primitiva:

$$\int (-x^2 - x + 6) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x$$

Evaluamos entre  $-3$  y  $2$ :

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^2$$

Para  $x = 2$ :

$$-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 = -\frac{8}{3} - 2 + 12 = -\frac{8}{3} + 10 = \frac{-8 + 30}{3} = \frac{22}{3}$$

Para  $x = -3$ :

$$-\frac{(-27)}{3} - \frac{9}{2} + 6(-3) = 9 - \frac{9}{2} - 18 = -9 - \frac{9}{2} = -\frac{18}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{27}{2}$$

Entonces:

$$A = \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2}\right) = \frac{22}{3} + \frac{27}{2} = \frac{44}{6} + \frac{81}{6} = \frac{125}{6}$$

Numéricamente:

$$A \approx 20.833$$

### Práctica con Python para el ejemplo 6.3.7.

Implementa las siguientes entradas en Python para obtener los resultados del ejercicio anterior:

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(x):
```

```
    return 4 - x
```

```
def g(x):
```

```
    return x**2 - 2
```

```
x1, x2 = -3, 2
```

```
xs = np.linspace(x1 - 1, x2 + 1, 400)
```

```
plt.figure()
```

```
plt.plot(xs, f(xs), label=r"$y=4-x$")
```

```
plt.plot(xs, g(xs), label=r"$y=x^2-2$")
```

```
xs_fill = np.linspace(x1, x2, 400)
```

```
plt.fill_between(xs_fill, f(xs_fill), g(xs_fill), alpha=0.3)
```

```
# puntos de corte
```

```
plt.scatter([x1, x2], [f(x1), f(x2)], color='black')
```

```
plt.text(x1, f(x1), "(-3,7)", ha="right", va="bottom")
```

```
plt.text(x2, f(x2), "(2,2)", ha="left", va="bottom")
```

```
plt.axhline(0, color='gray', linewidth=0.8)
```

```
plt.axvline(0, color='gray', linewidth=0.8)
```

```
plt.xlim(x1 - 1, x2 + 1)
```

```
plt.ylim(min(g(xs))-1, max(f(xs))+1)
```

```
plt.xlabel("x")
```

```
plt.ylabel("y")
```

```
plt.title("Área entre $y=4-x$ y $y=x^2-2$")
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

### 6.4. Ejercicios propuestos:

1. Hallar el área de la región R encerrada por los gráficos de

$$f(x) = 3 - x^2 \text{ y } g(x) = x + 1.$$

2. Hallar el área de la región G encerrada por los gráficos de las ecuaciones

$$x = -y + 1 \text{ y } x = 3 - y^2$$

3. Verificar que el área de la región encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es } A = \pi ab$$

4. Hallar el área encerrada por los gráficos de las funciones:

a)  $f(x) = x^2 - 4x$

b)  $y = -x^2 + 2x, y = x^2 - 6x$

c)  $f(x) = xe^x, g(x) = e^x$

d) Las rectas  $x = 0, x = 3$  y los gráficos de las funciones  $y = x^2 + 4$  e  $y = x^3$

## Bibliografía

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Cálculo: Una variable*. McGraw-Hill Education. ISBN 978-6071507653.

Ashlock, D. (2022). *Fast start integral calculus*. Springer Nature. ISBN 978-3-031-00267-0.

Asvi Heris, S., & Ignu Shinisha, J. (2020). *Differential and integral calculus* (1ª ed.). Skyfox Publishing Group. ISBN 978-93-90357-12-3.

Ayres Jr, F. (2008). *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill Education. ISBN 978-0070915206.

Demidovich, B. P. (1969). *Problems in mathematical analysis*. Gordon and Breach. ISBN 978-0677208404.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2012). *Cálculo con geometría analítica*. Pearson Educación. ISBN 978-6074428450.

Edwards, J. (2022). *Elements of the differential and integral calculus: With examples and applications*. Legare Street Press. ISBN 978-1-017-60115-2.

Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2023). *CLP-2 integral calculus* (May 2023 ed.). University of British Columbia.

Hass, J. R., Heil, C. E., Weir, M. D., & Bogacki, P. (2023). *Thomas' calculus* (15th ed.). Pearson. ISBN 978-0-13-761607-7.

Larson, R., & Edwards, B. (2013). *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill Education. ISBN 978-6071511575.

Leithold, L. (2004). *El cálculo con geometría analítica*. Oxford University Press. ISBN 978-0195157345.

Love, C. E. (2022). *Differential and integral calculus, with examples and applications*. Legare Street Press. ISBN 1-015-54158-5.

Paltineanu, G., Bucur, I., & Zamfir, M. (2022). *Integral calculus for engineers* (1st ed. 2022). Springer Nature. ISBN 9811947929.

Phillips, H. B. (2022). *Integral calculus*. Legare Street Press. ISBN 978-1-017-28227-6.

Piskunov, N. (2009). *Cálculo diferencial e integral* (6ª ed.). Editorial Limusa. ISBN 978-9681839857.

Protter, M. H., & Morrey, C. B. (2001). *Cálculo, una variable*. Prentice Hall Hispanoamericana. ISBN 978-0130406548.

Purcell, E. J., Varberg, D. E., & Rigdon, S. E. (2012). *Cálculo*. Pearson Educación. ISBN 978-6074423516.

Stewart, J. (2015). *Cálculo de una variable*. Cengage Learning. ISBN 978-6075222996.

Strang, G. (2023). *Calculus* (updated OCW ed., Fall 2023). Wellesley-Cambridge Press / MIT OpenCourseWare.

Swokowski, E. W., & Jeffery, A. (2008). *Cálculo con geometría analítica*. Cengage Learning. ISBN978-6074810422.

Todhunter, I. (2022). *Principles of the differential and integral calculus*. Creative Media Partners, LLC. ISBN 978-1-018-89925-1.

Tsopméné, P. (2023). *Integral calculus with applications to life sciences: Exercise book with fully worked solutions*. University of British Columbia.

Zill, D. G. (2012). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (10th ed.). Cengage Learning. ISBN 978-1111827052.

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones diferenciales* (3rd ed.). McGraw-Hill/Interamericana Editores. ISBN 978-6071508636.

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2017). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (9th ed.). Cengage Learning. ISBN 978-1337559881.

**cedia**  
cedia.edu.ec

